DL mathématiques n°9
réponses

ESC 2004

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0;1[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, l'urne n contient k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où « pile »a été obtenu.
Par exemple, si on a obtenu quatre « piles »au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne n°4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de « piles »obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
   Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

RÉPONSE:

On compte le nombre de succes "obtenir" un pile lors de la répétition de n expérience de Bernouilli indépendantes, on reconnait un modèle binomial

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p),\ X(\Omega) = [\![0, n]\!],\ \text{pour } k \in [\![0, n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\ E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)}$$

*

(b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.

RÉPONSE:

Comme X admet une variance

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

donc

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + E(X)^2 \\ &= np(1-p) + n^2p^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X^2) = np\,(1 + (n-1)p)}$$

*

(c) Calculer $P_{(X=0)}(Y=0)$ et $P_{(X=n)}(Y=0)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

RÉPONSE:

Si on suppose que l'on a obtenu 0 Pile, l'urne est composé uniquement de bille de rouge et donc la probabilité d'obtenir une bille rouge $[Y=0]$ vaut 1.
Si on suppose que $[X=n]$ est réalisé, alors l'urne dans lequel s'effectue le tirage est constitué uniquement de billes vertes donc nous sommes surs de tirer une bille verte.

$$\boxed{P_{(X=0)}(Y=0) = 1 \text{ et } P_{(X=n)}(Y=0) = 0}$$

*

(d) Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\quad P_{(X=k)}(Y=1) = \dfrac{k}{n}$.

RÉPONSE:

Supposons l'événement $[X = k]$ réalisé, alors l'urne dans laquelle s'effectue les tirages est composée de k billes vertes et n billes au total. La probabilité de tirer une bille verte est alors de $\frac{k}{n}$, le tirage étant honnête. On remarque que d'après la question précédente

$$P_{(X=0)}(Y = 1) = 1 - 1 \qquad P_{(X=n)}(Y = 0) = 1 - 0$$

Donc la formule trouvée est bien valide dans ces deux cas.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0, n]\!], \quad P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}}$$

*

(e) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(X = k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, que :

$$P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}$$

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) P_{X=k}(Y = 1) && \text{proba totales} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \frac{k}{n} && \text{question précédente} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} E(X) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y = 1) = \tfrac{E(X)}{n}}$$

*

(f) Donner la loi de Y et son espérance.

RÉPONSE:

Y a pour support $\{0, 1\}$ c'est donc une loi de Bernoulli.

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\tfrac{E(X)}{n}\right) \text{ et } E(Y) = \tfrac{E(X)}{n}}$$

*

(g) Montrer que $E(XY) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k P(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{\substack{x\in[\![0,\,n]\!]\\ y\in\{0,1\}}} xyP(X=x,Y=y) && \text{théorème de transfert}\\
&= \sum_{x\in[\![0,\,n]\!]} x\times 1\times P(X=x,Y=1) && \text{mes autres termes sont nuls}\\
&= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k,Y=1)\\
&= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k)P_{X=k}(Y=1)\\
&= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k)\frac{k}{n} && \text{question ..}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k^2P(X=k)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{n}E(X^2)$ théorème de transfert

$$\boxed{E(XY) = \frac{E(X^2)}{n}}$$

*

(h) En déduire la covariance du couple (X,Y).

RÉPONSE:

LA covariance du couple existe car les moment d'ordre deux de X et Y existent car ces deux variables aléatoires sont à support fini. En utilisant la formule de König-Huygens

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\,(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y)\\
&= \frac{E(X^2)}{n} - E(X)\frac{E(X)}{n}\\
&= \frac{1}{n}\left(E(X^2) - E(X)^2\right)\\
&= \frac{1}{n}V(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cov}\,(X,Y) = p(1-p)}$$

*