

ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES II

réponses

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{2}{3}$.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{1}{2}$.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{1}{3}$.

- Lorsque qu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A).

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

ABC_n : " à l'issue de la n -ième épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ".

AB_n : " à l'issue de la n -ième épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ".

On définit de façon analogue les événements BC_n , et CA_n .

A_n : " à l'issue de la n -ième épreuve, seul A n'est pas éliminé ".

On définit de façon analogue les, événements B_n et C_n .

$\emptyset_n$: " à l'issue de la n -ième épreuve, les trois tireurs sont éliminés ".

Enfin, ABC_0 est l'événement certain, AB_0 , BC_0 , CA_0 , A_0 , B_0 , C_0 , $\emptyset_0$ l'événement impossible.

PARTIE 1

On établit dans cette partie 1 quelques résultats probabilistes préliminaires.

1. Calcul de probabilités

- Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $\mathbf{P}(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $\mathbf{P}(U)$, $\mathbf{P}(V)$ et $\mathbf{P}(U \cap V)$.

RÉPONSE:

$$\mathbf{P}(U \cup V) = \mathbf{P}(U) + \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(U \cap V)$$

*

- En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

RÉPONSE:

« (A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir) » peut s'écrire « (A rate son tir et B réussit) ou (A rate son tir et C réussit son tir) »

Pour utiliser la formule précédente on remarque

« (A rate son tir et B réussit) et (A rate son tir et C réussit son tir) » est l'événement « (A rate son tir et B réussit et C réussit son tir), a par indépendance , une probabilité de $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{18}$

en utilisant le résultat de la question précédente $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{18}$

Cette probabilité vaut $\frac{2}{9}$

*

- (c) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

RÉPONSE:

La réunion disjointe de (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir) et (A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir) forme l'événement (B ou C réussissent leur tir). Ce dernier à, en utilisant la première question, pour probabilité $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
donc la probabilité de « (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir). » est de $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

« (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir) » a une probabilité de $\frac{4}{9}$.

*

2. Détermination de probabilités conditionnelles

- (a) Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout nombre entier naturel n .

RÉPONSE:

Les joueurs tirent sur le joueur le plus dangereux. donc personne ne tire sur C tant que A et B sont présents, C ne peut pas être le premier joueur éliminé.

*

Dans la suite, on ne considérera donc que les événements $ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n, \emptyset_n$.

(b) Expliciter la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{ABC_n}(ABC_{n+1})$.

RÉPONSE:

Supposons ABC_n réalisé, alors à l'issue de l'étape n , les trois joueurs sont présents, dans ce cas là pour que ABC_{n+1} se réalise, il faut que les trois joueurs rate leur tir ce qui a une probabilité de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$

$$\mathbf{P}_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = \frac{1}{9}.$$

*

(c) Expliciter $\mathbf{P}_{ABC_n}(BC_{n+1})$ à l'aide de la question 1, puis donner $\mathbf{P}_{ABC_n}(CA_{n+1})$.

RÉPONSE:

Supposons réalisé ABC_n donc à l'issue de la nième étape, les trois joueurs sont présents à l'étape $n+1$:

- A tire sur B
- B et C tirent sur A

Pour qu'à l'issue de l'étape $n+1$ seuls soient présents B et C, il faut que A rate et (B ou C réussissent)

$$\mathbf{P}_{ABC_n}(BC_{n+1}) = \frac{2}{9}.$$

Pour qu'à l'issue de l'étape $n+1$ seuls soient présents A et C, il faut que A réussisse et (B et C ratent), ce qui donne

qui par indépendance vaut $\frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$

$$\mathbf{P}_{ABC_n}(AC_{n+1}) = \frac{2}{9}.$$

*

(d) Expliciter $\mathbf{P}_{ABC_n}(A_{n+1})$, $\mathbf{P}_{ABC_n}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{ABC_n}(C_{n+1})$.

RÉPONSE:

Si ABC_n se réalise personne ne tire sur C au tour suivant

$$\mathbf{P}_{ABC_n}(A_{n+1}) = 0 = \mathbf{P}_{ABC_n}(B_{n+1}),$$

Supposons ABC_n est réalisé, alors pour que C_{n+1} se réalise il faut que A réussisse et (B ou C réussissent), en utilisant la troisième question

$$\mathbf{P}_{ABC_n}(C_{n+1}) = \frac{4}{9}.$$

*

(e) Expliciter $\mathbf{P}_{CA_n}(A_{n+1})$, $\mathbf{P}_{BC_n}(B_{n+1})$, $\mathbf{P}_{CA_n}(C_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{BC_n}(C_{n+1})$.

RÉPONSE:

Supposons que CA_n est réalisé alors

- A tire sur C
- C tire sur A
- B a été éliminé

Dans ces conditions A_{n+1} se réalise si A réussit et C rate son tir.

$$\mathbf{P}_{AC_n}(A_{n+1}) = \frac{4}{9}.$$

Supposons que BC_n est réalisé alors

- B tire sur C
- C tire sur B
- A a été éliminé

dans ces conditions pour que B_{n+1} se réalise il faut que B réussisse et C rate

$$\mathbf{P}_{BC_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

*

(f) Expliciter $\mathbf{P}_{ABC_n}(\emptyset_{n+1})$, $\mathbf{P}_{BC_n}(\emptyset_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{CA_n}(\emptyset_{n+1})$.

RÉPONSE:

Supposons ABC_n réalisé alors

- A tire sur B
- B et C tirent sur A.

C ne peut donc pas être éliminé au tour suivant

$$\mathbf{P}_{ABC_n}(\emptyset_{n+1}) = 0.$$

Supposons BC_n réalisé, alors

- B tire sur C
- C tire sur B

Pour que $\emptyset_{n+1}$ se réalise il faut que B et C réussissent leur tir.

$$\mathbf{P}_{BC_n}(\emptyset_{n+1}) = \frac{1}{6}.$$

Supposons CA_n réalisé, alors

- A tire sur C
- C tire sur A

Pour que $\emptyset_{n+1}$ se réalise il faut que A et C réussissent leur tir.

$$\mathbf{P}_{CA_n}(\emptyset_{n+1}) = \frac{2}{9}.$$

*

3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

(a) Quelle est la probabilité de l'événement $T = 1$?

RÉPONSE:

Au premier tour A tire sur B, b et c tirent sur A, pour que le jeu se termine à l'issue du premier tour, il faut qu'il ne reste que C, ie que A et B soi éliminés.

$[T = 1]$ est réalisé ssi au premier tir A réussi et (B ou C réussissent). D'après les premières questions

$$P(T = 1) = \frac{4}{9}$$

*

(b) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots ABC_{n-1} \cap ABC_n$$

RÉPONSE:

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots ABC_{n-1} \cap ABC_n = ABC_0 \cap ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots ABC_{n-1} \cap ABC_n$$

On admet qu'aucun des événements ABC_n n'est de probabilité nulle.

Le **théorème des probabilités composées** donne

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(ABC_0 \cap ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n) \\ &= \mathbf{P}(ABC_0) \mathbf{P}_{ABC_0}(ABC_1) \mathbf{P}_{ABC_0 \cap ABC_1}(ABC_2) \times \dots \times \mathbf{P}_{ABC_0 \cap \dots \cap ABC_{n-1}}(ABC_n) \end{aligned}$$

Or

$$P(ABC_0) = 1$$

et pour i dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$\mathbf{P}_{ABC_0 \cap \dots \cap ABC_i}(ABC_{i+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

car c'est la probabilité que les trois joueurs ratent leur tirent

Pour $n \geq 2$ $\mathbf{P}(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$

*

- (c) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n$)

RÉPONSE:

En utilisant le théorème des probabilités composées

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n) = \\ & \mathbf{P}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k) \mathbf{P}_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k}(CA_{k+1}) \mathbf{P}_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1}}(CA_{k+2}) \times \\ & \dots \times \mathbf{P}_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1}}(CA_n) \end{aligned}$$

D'après la question précédente

$$\mathbf{P}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k) \mathbf{P}_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k} = \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

Supposons $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k$ réalisé, alors les trois joueurs sont encore présents

- A tire sur B
- B,C tirent sur A

, pour que CA_{k+1} se réalise il faut que A réussisse et B rate et C rate

$$\mathbf{P}_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k}(CA_{k+1}) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

Supposons $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1}$ réalisé alors

- B a été éliminé ;
- A tire sur C
- C tire sur A

Pour que CA_{k+2} se réalise, il faut donc que C et A ratent leur tir

$$\mathbf{P}_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1}}(CA_{k+2}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

les autres probabilités se calculent de la même façon et sont identiques

$$\mathbf{P}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k-1}$$

Si $k = 0$ on obtient bien avec le théorème des probabilités composées

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n) &= \mathbf{P}(ABC_0) \mathbf{P}_{ABC_0}(CA_1) \mathbf{P}_{CA_1}(CA_2) \times \\ &\quad \dots \mathbf{P}_{CA_1 \cap \dots \cap CA_{n-1}}(CA_n) = \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

ce qui est cohérent

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P} (ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^k \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{9} \right)^{n-k-1} \\
&= \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^k \times \left(\frac{2}{9} \right)^{-k} \right) \\
&= \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^k \times \left(\frac{9}{2} \right)^k \right) \\
&= \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) \\
&= \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

La probabilité de cette union est $\frac{8}{9} \times \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$, cela correspond à la probabilité que seuls C et A sont présents à l'issue de l'étape n .

*

- (d) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$)

RÉPONSE:

On trouve de la même façon

$$\mathbf{P}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n) = \left(\frac{1}{9} \right)^k \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-k-1}$$

et en sommant

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P} (ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^k \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-k-1} \\
&= \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^k \times \left(\frac{1}{3} \right)^{-k} \right) \\
&= \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{9} \right)^k \right) \\
&= \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{1}{3} \right)^n \times \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)
\end{aligned}$$

La probabilité de cette union est $\left(\frac{1}{3} \right)^n \times \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$, cela correspond à la probabilité que seuls C et B soient présents à l'issue de l'étape n .

*

- (e) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la n -ième épreuve, et en déduire la probabilité $\mathbf{P}(T = n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n = 1$ le résultat obtenu à la question 3a).

RÉPONSE:

Le jeu se termine strictement après l'étape n si à l'issue de l'étape n , il reste trois ou deux joueurs (et ces deux joueurs ne peuvent être que B et C ou A et C).

$$[T > n] = (ABC_n) \cup (AC_n)_c \cup (BC_n)$$

Cette union est disjointe et en utilisant les résultats précédents.

On a

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(T > n - 1) - \mathbf{P}(T > n)$$

*

- (f) Vérifier que la somme de la série de terme général $\mathbf{P}(T = n)$ (avec $n \geq 1$) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T .

PARTIE II

Dans cette partie, on détermine les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1. Expression de la matrice de transition M

- (a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas, $\mathbf{P}(ABC_n)$, $\mathbf{P}(BC_n)$, $\mathbf{P}(CA_n)$, $\mathbf{P}(A_n)$, $\mathbf{P}(B_n)$, $\mathbf{P}(C_n)$, $\mathbf{P}(\emptyset_n)$.

Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel n :

$$E_{n+1} = ME_n.$$

On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1

RÉPONSE:

$$M = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 0 & 2/9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1/6 & 1/9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*

(b) En déduire E_n en fonction de n , de M et E_0 .

RÉPONSE:

Initialisation Pour $n = 0$ $M^0 E_0 = I_7 E_0 = E_0$

Hérédité Soit n entier naturel, supposons que $E_n = M^n E_0$.

D'après la question précédente

$$E_{n+1} = M E_n = M M^n E_0$$

d'où

$$E_{n+1} = M^{n+1} E_0$$

description D'après le principe de récurrence

Pour n entier naturel $E_n = M^n E_0$

*

2. Calcul des puissances de la matrice M

- (a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U', U'' et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V', V'' et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7

$$M' = \begin{pmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{pmatrix}, \quad M'' = \begin{pmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{pmatrix}$$

où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice-identité d'ordre 4.

Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M' M'' = \begin{pmatrix} U' & O \\ V' U'' + V'' & I_4 \end{pmatrix}$$

- (b) Expliciter les matrices U et V telles que : $M = \begin{pmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{pmatrix}$

RÉPONSE:

$$U = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 2/9 & 1/3 & 0 \\ 2/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/9 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 4/9 & 1/6 & 1/9 \\ 0 & 1/6 & 2/9 \end{pmatrix}$$

*

(c) Etablir enfin par récurrence sur $n \geq 1$ l'égalité suivante : $M^n = \begin{pmatrix} U & O \\ V + VU + \dots + VU^{n-1} & I_4 \end{pmatrix}$

3. Diagonalisation de la matrice U

(a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de U avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :

- la *première* composante de V_1 vaut 1.
- la *troisième* composante de V_2 vaut 1.
- la *deuxième* composante de V_3 vaut 1.

(b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2, V_3 . Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4. Calcul de la limite des puissances de la matrice M

(a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$.

(b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice X .

On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles (U^n) , $(I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \dots + VU^{n-1})$.

(c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n) .

(d) Vérifier que les suites $(\mathbf{P}(ABC_n))$, $(\mathbf{P}(BC_n))$ et $(\mathbf{P}(CA_n))$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(\mathbf{P}(A_n))$, $(\mathbf{P}(B_n))$, $(\mathbf{P}(C_n))$, $(\mathbf{P}(\emptyset_n))$. Comparer les probabilités respectives pour que A, B, C remportent le combat.