

MATHÉMATIQUE
03 JANVIER 2022
DURÉE 4 HEURES

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Cette épreuve est tirée de EML 2018

EXERCICE 1

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a. Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

RÉPONSE:

Notons pour $i \in \mathbb{N}^*$, P_i : « on obtient pile au tirage i » et F_i : « on obtient face au tirage i »

$$[X = 0] = P_1 \cap P_2$$

donc par indépendance des tirages

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$[X = 1] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

Donc par incompatibilité des événements

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

et comme les tirages sont indépendants

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$[X = 2] = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4)$$

Donc de même que précédemment

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4}{9}, \mathbb{P}(X = 1) = \frac{8}{27} \text{ et } \mathbb{P}(X = 2) = \frac{4}{27}.$

*

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}.$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$[X = n]$ est réalisé si et seulement si le tirage $n + 2$ donne pile, et parmi les $n + 1$ premier tirage un et un seul est un pile

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \underbrace{\binom{n+1}{1}}_{\text{choix de la place du 1er tirage pile}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}} \end{aligned}$$

Pour tous entier naturel n , $\mathbb{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}.$

*

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .

RÉPONSE:

D'après ce qui précède la première étape peut avoir comme résultats tous les entiers de $\mathbb{N}$, et donc comme la deuxième étape peut se faire dans une urne dont les boules sont numérotées de 0 à un entier arbitrairement grand, tous les entiers naturels sont des issues possibles de la seconde étape.

$$U(\Omega) = \mathbb{N}.$$

*

b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

RÉPONSE:

Supposons $[X = n]$ réalisé, alors l'urne comporte $n + 1$ boules numérotées de 0 à n . Le tirage étant honnête, la probabilité de choisir chaque boule est égale. De plus on ne peut pas obtenir une boule dont le numéro est plus grand que n .

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ alors pour } k \text{ entier } \mathbb{P}_{[X=n]}(U = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

*

c. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

RÉPONSE:

Appliquons le théorème des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, car d'après la première partie aucune des probabilités $\mathbb{P}(X = n)$ n'est nulle.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U = k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{[X=n]}(U = k) \mathbb{P}([X = n]) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} 0 \cdot \mathbb{P}([X = n]) + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{Question précédente} \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } k \text{ de } \mathbb{N} : \mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]).$$

Puis

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([U = k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} && \text{partie précédente} \\
 &= 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\
 &= 4 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{i+k+2}} && \text{en posant } n = k + i \\
 &= \frac{4}{9 \cdot 3^k} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^i} \\
 &= \frac{4}{9 \cdot 3^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} && \text{somme d'une série géométrique convergente de raison } \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3^{k+1}}
 \end{aligned}$$

Pour tout k de $\mathbb{N}$: $\mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$.

*

d. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

RÉPONSE:

On peut faire le calcul directement en s'inspirant fortement des calculs effectués pour une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

On peut aussi remarquer que si l'on note $X' = X + 1$, X' a pour support $\mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel k .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X' = k) &= \mathbb{P}(X + 1 = k) \\
 &= \mathbb{P}(X = k - 1) \\
 &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{k-1} \\
 X' = X + 1 &\hookrightarrow \mathbb{G}\left(\frac{2}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Donc X' admet une espérance et une variance

$$E(X') = \frac{3}{2} \quad V(X) = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

On sait de plus

$$E(X) = E(X' - 1) = E(X') - 1 \quad V(X + 1) = V(X)$$

$$X \text{ admet une variance et une espérance et } E(X) = \frac{1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{3}{4}.$$

*

3. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .

RÉPONSE:

On sait que l'urne peut à l'issue de la première étape, comporter des boules numérotées de 0 à n où n est un nombre arbitrairement grand. le numéro de la boule est toujours plus petit ou égal au numéro de l'urne donc les valeurs de V sont des entiers positifs, et de plus comme n est arbitrairement grand et que la boule peut porter le numéro 0, V peut prendre comme valeur tous les entiers naturels.

$$V(\Omega) = \mathbb{N}.$$

*

b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $[X = n]$ réalisé et soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X=n]}(V = k) &= \mathbb{P}_{[X=n]}(X - U = k) \\ &= \mathbb{P}_{[X=n]}(n - U = k) \\ &= \mathbb{P}_{[X=n]}(U = n - k) \\ &= \frac{1}{n + 1} \end{aligned}$$

question **b**.

Si $k > n$ alors

$$\mathbb{P}_{[X=n]}(V = k) = 0$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ alors pour } k \text{ entier } \mathbb{P}_{[X=n]}(V = k) = \begin{cases} \frac{1}{n + 1} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

*

c. En déduire la loi de V .

RÉPONSE:

Comme les lois conditionnelles sachant $[X = n]$ réalisé sont identiques

X et V suivent la même loi.

*

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

RÉPONSE:

On constate que $U + V = X$.
Soit i et j deux entiers naturels

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([U = i] \cap [V = j]) &= \mathbb{P}([U = i] \cap [X = j + i]) \\ &= \mathbb{P}_{[X=j+i]}([U = i])\mathbb{P}(X = j + i) \\ &= \frac{1}{i + j + 1} \mathbb{P}(X = j + i) &= \frac{1}{i + j + 1} \frac{4(n+1)}{3^{i+j+2}} \text{ loi de } X \\ &= \frac{4}{3^{i+j+2}}\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(U = i)\mathbb{P}(V = j) = \frac{2}{3^{i+1}} \cdot \frac{2}{3^{j+1}} \quad \text{lois de } U \text{ et } V = \frac{4}{3^{i+j+2}}$$

Donc

$$\forall i \in U(\Omega) \times V(\Omega) \quad \mathbb{P}([U = i] \cap [V = j]) = \mathbb{P}(U = i)\mathbb{P}(V = j)$$

U et V sont indépendantes.

*

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus;

- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

5. Simulation informatique

- Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X .

RÉPONSE:

```
function x=simule_X()
    nb_faces=0
    nb_piles=0
    while nb_piles<2
        p=rand()
        if p<2/3 then
            nb_piles=nb_piles+1
        else
            nb_faces=nb_faces+1
        end
    end
    x=nb_faces
endfunction
```

*

- On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
1 function r = mystere(p)
2     r = 0
3     N = 10^4
4     for k = 1:N
5         x = simule_X()
6         y = simule_Y(p)
7         if x <= y then
8             r = r + 1/N
9         end
10    end
11 endfunction
```

RÉPONSE:

On simule N fois le jeu avec N est très grand. À chaque fois que le joueur A gagne c'est à dire quand $X \leq Y$, on rajoute $1/N$ à r . Cela revient à calculer la fréquence des victoires de A car pour calculer la fréquence on divise le nombre de victoires par le nombre de parties, donc chaque victoire "rapporte" $1/N$.

On aurait pu écrire

```

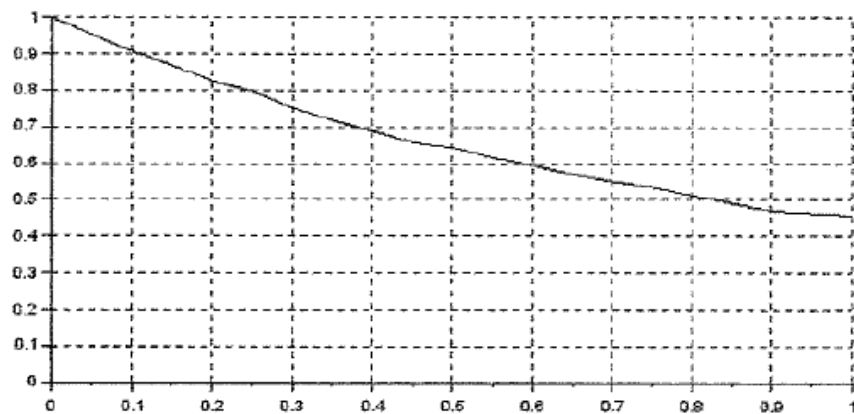
1  function r = mystere(p)
2      r = 0
3      N = 10^4
4      for k = 1:N
5          x = simule_X()
6          y = simule_Y(p)
7          if x <= y then
8              r = r + 1
9          end
10     end
11     r=r/N
12 endfunction

```

□

*

- c. On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

RÉPONSE:

Le jeu est équilibré quand les deux joueurs ont la même chance de gagner, ce qui se voit quand la courbe passe par l'ordonnée 0.5.

On peut estimer que le jeu est équilibré pour $p = 0,8$.

*

Bonus Voici un programme qui trace le graphe précédent.

```

function x=simule_X()
    nb_faces=0
    nb_piles=0
    while nb_piles<2
        p=rand()
        if p<2/3 then
            nb_piles=nb_piles+1
        else
            nb_faces=nb_faces+1
        end
    end
    x=nb_faces
endfunction

function y=simule_Y(p)
    y=0 //nb de face
    while rand()>p //obtenir un pile
        y=y+1
    end
endfunction

function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10^4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
endfunction

absc=[]
ord=[]

for p=0.01:0.01:0.99 // toute les valeurs de p> 0 et <1 par pas de 0.01
    absc=[absc,p]
    ord=[ord,mystere(p)]
end

plot(absc,ord)

```

6. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

- a. Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

Z suit la loi géométrique de paramètre p

$$Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p), E(Z) = \frac{1}{p}, V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

*

- b.** Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

RÉPONSE:

Dans cette expérience le nombre de lancers est égal au nombre de faces obtenue plus 1.

$$Z = Y + 1$$

donc

$$Y = Z - 1$$

On obtient donc

$$E(Y) = E(Z) - E(1) = \frac{1}{p} - 1$$

par linéarité de l'espérance et

$$V(Y) = V(Z)$$

$$E(Y) = \frac{1-p}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$

*

- c.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([Y \geq n]) = (1-p)^n.$

RÉPONSE:

Il ya de nombreuse méthodes pour répondre à cette question, en voici une.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} [Y \geq n] &= \bigcup_{k=n}^{+\infty} [Y = k] \\ &= \bigcup_{k=n}^{+\infty} [Z - 1 = k] \\ &= \bigcup_{k=n}^{+\infty} [Z = k + 1] \end{aligned}$$

Comme les événements de cette union sont incompatibles

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y \geq n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k + 1) \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k+1-1} p && \text{définition de la loi géométrique} \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k p \\
 &= p \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j+n} && \text{changement d'indice } k = j + n \\
 &= p(1-p)^n \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j \\
 &= p(1-p)^n \frac{1}{1 - (1-p)} && \text{somme totale d'une série géométrique} \\
 &= (1-p)^n
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([Y \geq n]) = (1-p)^n..}$$

*

7. a. Montrer : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y \geq n])$.
RÉPONSE:

Utilisons le théorème des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X \leq Y]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y \leq X]) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y \leq n]) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y \geq n) && \text{car les variables sont indépendantes}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y \leq n]).}$$

*

b. Dédurre des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X \leq Y]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y \leq n]) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} (1-p)^n && \text{première partie et questions précédentes} \\
 &= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \\
 &= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1} && \text{changement d'indice} \\
 &= \frac{4}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} && \text{série dérivée de la série géométrique avec } 0 < \frac{1-p}{3} < 1/3 \\
 &= \frac{4}{(2+p)^2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}.}$$

*

c. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

RÉPONSE:

Le jeu est équilibré si et seulement si la probabilité précédente est égale à 0,5.

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{(2+p)^2} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2+p)^2 = 8 \\
 &\Leftrightarrow 2+p = \sqrt{8} \text{ ou } 2+p = -\sqrt{8} \\
 &\Leftrightarrow p = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ ou } p = 2(-\sqrt{2} - 1)
 \end{aligned}$$

La deuxième solution est négative. Comme $\sqrt{2} > 1$ la première est positive et on peut montrer¹ en utilisant $8 < 9$ que la deuxième solution est plus petite que 1

Le jeu est équilibré pour $p = 2\sqrt{2} - 2$.

1. laissé en exercice

*

Remarque : une valeur approchée à 10^{-2} près est 0,82

EXERCICE 2

EML2018

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1.$$

1. a. Calculer v .

RÉPONSE:

On a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc comme A est la matrice représentative de f dans la base canonique

$$f(e_1) = -2e_2 - e_3$$

$v = e_1 - 2e_2 + e_3$

*

b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

RÉPONSE:

Soit α, β et γ trois réels.

$$\alpha u + \beta v + \gamma e_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(e_1 - e_2) + \beta(e_1 - 2e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)e_1 + (-\alpha - 2\beta)e_2 + \beta e_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ +\beta = 0 \end{cases}$$

car (e_1, e_2, e_3) est une famille libre

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

résolution

La famille est donc libre. Comme de plus $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ c'est une base de $\mathbb{R}^3$

La famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

*

- c. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} .

RÉPONSE:

Les colonnes de cette matrice sont constituées des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ exprimés dans $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*

2. a. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

RÉPONSE:

D'après la formule de changement de base.

$$A' = P^{-1}AP$$

donc

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*

b. En déduire les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
RÉPONSE:

La matrice A' est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale.

$$\text{Sp}(A') = \{-1, 2\}$$

Comme A' est une matrice représentative de f

$$\mathbf{f}(A') = \{-1, 2\}$$

Calcul de E_{-1} le sous espace propre de A' associé à -1 dans la base $\mathcal{C}$ Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x & = -x \\ -y + z & = -y \\ -z & = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

Donc

$$E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Calcul de E_2 le sous espace propre associé à 2

$$A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & = 2x \\ -y + z & = 2y \\ -z & = 2z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

Donc

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

On constate que

$$\dim E_2 + \dim E_{-1} \neq 3$$

A' n'est donc pas diagonalisable

f n'est pas diagonalisable.

*

c. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

RÉPONSE:

On a vu que 0 n'est pas une valeur propre de f

f est bijective.

*

d. Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A , A' , P et P^{-1} .

RÉPONSE:

$$A = P A' P^{-1}$$

*

3. a. Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} g(e_1) &= g(1, 0, 0) = (1, 0, -1) & &= e_1 - e_3 \\ g(e_2) &= g(0, 1, 0) = (1, 2, 1) & &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ g(e_3) &= g(0, 0, 1) = (-1, 0, 1) & &= -e_1 + e_3 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*

b. Montrer : $B^2 = 2B$.

RÉPONSE:

$$B^2 = \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{B^2 = 2B.}$$

*

c. En déduire les valeurs propres de g , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

RÉPONSE:

On vient de montrer que $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de B . Les seules valeurs propres possibles de B sont les racines de ce polynôme c'est à dire 0 et 2.

$$\boxed{\text{Sp}(B) \subset \{0, 2\}}$$

Étude de la valeur propre potentielle 2 Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$B' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 2x \\ 2y &= 2y \\ -x + y + z &= 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y - z$$

Il existe des solutions non nulles donc :

$$\boxed{2 \text{ est valeur propre de } g \text{ et } E'_2 = \text{Vect}(e_1 + e_2, -e_1 + e_3)}$$

Étude de la valeur propre potentielle 0 Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$B' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0 - z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= 0 \end{cases}$$

Il existe des solutions non nulles donc :

$0 \text{ est valeur propre de } g \text{ et } E'_0 = \text{Vect}(e_1 + e_3)$

*

d. L'endomorphisme g est-il diagonalisable?

RÉPONSE:

D'après la question précédente

$$\dim E'_0 + \dim E'_2 = 2 + 1 = \dim R^3$$

La matrice B' représentant g est donc diagonalisable donc

$g \text{ est diagonalisable.}$

*

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / BM = MA\}$.

4. a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

RÉPONSE:

Méthode 1

- Par définition $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- Si 0 désigne la matrice nulle on a bien $B0 = 0 = 0A$ donc

$$0 \in \mathcal{E}$$

- Soit M et N deux éléments de $\mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B(M + \lambda N) &= BM + \lambda BN \\ &= MA + \lambda BN && \text{car } M \in \mathcal{E} \\ &= MA + \lambda NA && \text{car } N \in \mathcal{E} \\ &= (M + \lambda N)A \end{aligned}$$

Donc

$$M + \lambda N \in \mathcal{E}$$

Donc $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc

$\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

Méthode 2 : $\mathcal{E}$ est un noyau Posons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto BM - AM \end{aligned}$$

Cette application sont bien définie et soit M et N deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(M + \lambda N) &= B(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A \\ &= BM + \lambda BN - MA - \lambda NA \\ &= BM - MA + \lambda(BN - NA) \\ &= \varphi(M) + \lambda\varphi(N) \end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire et comme $\mathcal{E} = \text{Ker } \varphi$, $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et finalement.

$\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

*

- b.** Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. (On pourra raisonner par l'absurde).

RÉPONSE:

Supposons que M est inversible et que $BM = MA$, alors on peut écrire

$$B = MAM^{-1}$$

Donc B et A sont semblables, elles représentent le même endomorphisme (dans deux bases différentes) et donc devraient partager le même spectre, ce qui D'après les questions précédentes n'est pas vrai.

Aucune matrice de $\mathcal{E}$ n'est inversible.

*

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.
- a.** Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^tA) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

D'après un théorème du cours, le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg}({}^t(A - \lambda I_3)) \\ &= \text{rg}({}^tA - \lambda {}^tI_3) && \text{linéarité de la transposition} \\ &= \text{rg}({}^tA - \lambda I_3) && \text{acr} {}^tI_3 = I_3 \end{aligned}$$

Pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^tA) - \lambda I_3$ ont même rang.

*

- b.** En déduire que les matrices B et tA admettent une valeur propre en commun, notée α .

RÉPONSE:

$\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de tA si et seulement si ${}^tA - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Mais on sait qu'une matrice n'est pas inversible si et seulement si son rang n'est pas égale à son ordre.

$\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de tA si et seulement si $\text{rg} ({}^tA - \lambda I_3) \neq 3$

Or d'après la question précédente les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^tA) - \lambda I_3$ ont même rang.

$\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de tA si et seulement si $\text{rg} (A - \lambda I_3) \neq 3$

et donc les valeurs propres de A sont exactement celle de tA

$\alpha = 2$ est une valeur propre commune à B et tA

*

- c. Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , et Y un vecteur propre de tA associé à la valeur propre α . On note : $N = X {}^tY$.

Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.

RÉPONSE:

Notons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ Comme X et Y sont des vecteurs propres ils sont par définitions non nuls, c'est à dire que l'un des coefficients est non nul. De plus

$$N = X {}^tY = \begin{pmatrix} aa' & ab' & ac' \\ ba' & bb' & bc' \\ ca' & cb' & cc' \end{pmatrix}$$

L'un des coefficients de cette matrice est non nul, celui qui est le produit d'un coefficient non nul de X et d'un coefficient non nul de Y .

Puis

$$BN = BX {}^tY$$

$$= (BX) {}^tY$$

$$= \alpha X {}^tY$$

$$= \alpha N$$

car X est un vecteur propre de B

$$NA = X {}^tYA$$

$$= X {}^t(AY)$$

$$= X {}^t(\alpha Y)$$

$$= \alpha N$$

propriété de la transposition

Y vecteur propre de tA

On a donc

$$BN = NA$$

et donc N appartient à $\mathcal{E}$.

La matrice $X^t Y$ est non nulle et appartient à $\mathcal{E}$.

*

d. En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

RÉPONSE:

Remarque : On peut faire le raisonnement si dessous en prenant les vecteurs propres calculés dans les questions précédentes.

Le sous espace propre de la matrice B associé à la valeur propre $\alpha = 2$ est de dimension deux. Soit X_1, X_2 une base de ce sous espace propres. D'après ce qui précède $N_1 = {}^t Y X_1$ et $N_2 = {}^t Y X_2$ sont deux éléments de $\mathcal{E}$. Montrons qu'ils forment une famille libre.

Soit α et β deux réels tels que

$$\alpha N_1 + \beta N_2 = 0$$

Alors

$${}^t(Y)(\alpha X_1 + \beta X_2) = 0$$

Si l'un des coefficients de $\alpha X_1 + \beta X_2$ était non nul alors on trouverait un coefficient non nul pour ${}^t(Y)(\alpha X_1 + \beta X_2)$ (même raisonnement que la première partie de la réponse précédente). Ce qui est impossible, donc $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0$ ce qui implique que $\alpha = \beta = 0$ car (X_1, X_2) est une famille libre.

Nous venons de démontrer que la famille (N_1, N_2) est libre dans $\mathcal{E}$. Comme la dimension de $\mathcal{E}$ est plus grande que le cardinal de toute famille libre :

$$\dim(\mathcal{E}) \geq 2$$

*

EXERCICE 3

EXERCICE 4

EML 2018 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

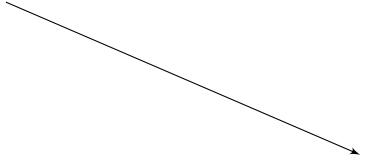
1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

RÉPONSE:

La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions usuelles.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Donc

x	0			1			$+\infty$			
Signe de $f'(x)$		-			0			+		
Variations de f		$+\infty$						$+\infty$		
					1					

La limite en zéro n'est pas une forme indéterminée.

$$\ln x =_{+\infty} o(x)$$

donc

$$x - \ln x \sim_{+\infty} x$$

ce qui justifie la limite en $+\infty$.

*

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.

RÉPONSE:

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; 1[$, elle induit donc une bijection de $]0; 1[$ vers $]f(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =]1; +\infty[$ comme 2 appartient à cette intervalle, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0; 1[$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$, elle induit donc une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =]1; +\infty[$ comme 2 appartient à cette intervalle, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1; +\infty[$.

Comme 1 n'est pas solutions les deux solutions trouvées sont les seules sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'équation $f(x) = 2$, admet exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$, telles que $0 < a < 1 < b$.

*

3. Montrer : $b \in [2; 4]$. On donne $\ln(2) \approx 0,7$.

RÉPONSE:

On a $f(2) = 2 - \ln 2 < 2$ et $f(4) = 4 - \ln 2 = 4 - 2 \ln 2$ qui est d'après l'indication plus grand que 2.

$$f(2) < f(b) < f(4)$$

Comme f est croissante sur $[1; +\infty[$

$$2 < b < 4$$

$$b \in [2; 4].$$

*

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b; +\infty[$.

RÉPONSE:

- **Initialisation** u_0 appartient bien à $[b; +\infty[$ car $b < 4$

- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons que u_n existe et appartient à $[b; +\infty[$. Alors comme $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln u_n$ existe de plus comme $\ln$ est croissante

$$\ln b + 2 < \ln u_n + 2$$

or $f(b) = 2$ donc $b = \ln b + 2$ donc

$$b < \ln u_n + 2$$

- **Conclusion** D'après le principe de récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [b; +\infty[$

*

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

RÉPONSE:

Comme f est croissante sur $[1; +\infty[$.

$$\forall x \in [b; +\infty[\quad f(b) \leq f(x)$$

et $f(b) = 2$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n - \ln u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 + \ln u_n \leq u_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$$

Donc la suite est décroissante et minorée par b , elle converge vers une limite que l'on note $\ell \in [b; +\infty[$. la fonction $x \mapsto \ln x + 2$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème du point fixe

$$\ell = \ln \ell + 2$$

Les deux possibilités sont a et b et comme $\ell \geq b$

La suite (u_n) converge vers b .

*

6. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $\varphi x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $[b; +\infty[$ et

$$\forall x \in [b; +\infty[\quad \varphi'(x) = \frac{1}{x}$$

donc comme $b > 2$

$$\forall x \in [b; +\infty[\quad \varphi'(x) \leq \frac{1}{2}$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[b; u_n]$

$$\varphi(u_n) - \varphi(b) \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$$

or

$$\varphi(u_n) - \varphi(b) = u_{n+1} - (\ln(b) + 2) = u_{n+1} - b$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)}$$

*

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

RÉPONSE:

- **Initialisation** $u_0 - b = 4 - b$ et comme $2 < b < 4$ $0 \leq u_0 - b < 2$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

On sait déjà que $u_{n+1} \geq b$ de plus

$$u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

- **Conclusion** D'après le principe de récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}}$$

*

7. (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n .

RÉPONSE:

```
function u = suite(n)
    u=4
    for i = 1:n
        u=log(u) + 2
    end
endfunction
```

*

- (b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel ϵ strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à ϵ près.

```
1  function b = valeur_approchee(epsilon)
2      n = 0
3      while 1/(2^(n-1)) > epsilon
4                                          n = n+1
5      end
6      b = suite(n)
7  endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt.$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

RÉPONSE:

f étant strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\frac{1}{f}$ y est continue.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, si nous notons G une primitive de la fonction continue $g : t \mapsto \frac{1}{f}(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, G est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\Phi(x) = G(2x) - G(x)$$

Donc par composition et somme Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= 2 \frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x} \\ &= \frac{2x - 2 \ln x - 2x + \ln(2x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\ &= \frac{-2 \ln x + \ln(2) + \ln x}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}\end{aligned}$$

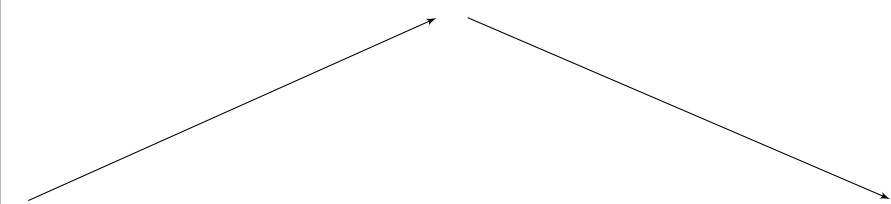
$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$

*

9. En déduire les variations de Φ sur $]0; +\infty[$.

RÉPONSE:

On sait que pour $x > 0$ $f(x) = x - \ln x$ est plus grand que 1, donc $(x - \ln(x))$ et $(2x - \ln(2x))$ sont strictement positifs.
 $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln 2 - \ln x$

x	0	2	$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		+	0 -
Variations de Φ			

*

10. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
D'après la première question

$$\forall t \in [x; 2x] \quad 1 \leq f(t)$$

donc

$$\forall t \in [x; 2x] \quad 0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{1}$$

comme $x \leq 2x$, par croissance de l'intégration

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt \leq \int_x^{2x} 1 dt$$

$$\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x.}$$

*

11. (a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

RÉPONSE:

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0}$$

Donc d'après le théorème des encadrements et l'inégalité précédente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$$

$$\boxed{\text{En posant } \Phi(0) = 0, \text{ on prolonge } \Phi \text{ par continuité}}$$

*

- (b) Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$.

On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

RÉPONSE:

On a $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty$ donc $x = o(\ln x)$ et

$$x - \ln x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$$

de même

$$2x - \ln x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln 2x \quad \ln 2 - \ln x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$$

donc

$$\Phi'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\ln 2x}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln 2x = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0.}$$

*

12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

RÉPONSE:

□

*