

Extrema des fonctions de deux variables.

ECE 2 Lycée international de Valbonne



20 février 2022

Table des matières

I	Rappels de première année sur les fonctions d'une variable	2
II	"Topologie" de $\mathbb{R}^2$	5
III	Extrema d'une fonction de deux variables	7
III.1	Point critique	7
III.2	Conditions suffisantes pour l'existence d'un extremum.	7

I Rappels de première année sur les fonctions d'une variable

Dans cette partie les fonctions sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Définition 1 (Majorant, minorant, bornes).

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

- On dit que f est **majorée** sur $\mathcal{D}$ si il existe un réel M tel que pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(x) \leq M$.
 M est alors **UN majorant** de f sur $\mathcal{D}$.
- On dit que f est **minorée** sur $\mathcal{D}$ si il existe un réel m tel que pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(x) \geq m$.
 m est alors **UN minorant** de f sur $\mathcal{D}$.
- On dit f est **bornée** sur $\mathcal{D}$ si et seulement si elle est minorée **et** majorée. Le minimum et le maximum de f sont des **bornes** de f .

Définition 2 (Extrema global).

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un **maximum** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que le réel $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathcal{D}$ et que f **atteint son maximum** en x_0 .
On le note

$$\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = \max_{\mathcal{D}} f$$

- On dit que f admet un **minimum** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit alors que le réel $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathcal{D}$ et que f **atteint son minimum** en x_0 . On le note

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = \min_{\mathcal{D}} f$$

- On appelle **extremum** de f sur $\mathcal{D}$ un minimum ou un maximum de f sur $\mathcal{D}$.

Définition 3 (Extrema local).

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$.

- On dit que f admet un **minimum local** en x_0 si et seulement si il existe un $\alpha > 0$ tel que la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ atteint un minimum en x_0 .
- On dit que f admet un **maximum local** en x_0 si et seulement si il existe un $\alpha > 0$ tel que la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ atteint un maximum x_0 .

Définition 4 (Segment).

Un **segment** est un intervalle fermé borné, c'est à dire la forme $[a; b]$.

Dans toute la suite si on écrit $[a; b]$ on supposera que $a < b$.

Théorème 1 (Fonction continue sur un segment).

Soit f une fonction **continue** sur le segment $[a; b]$ alors l'image de $[a; b]$ par f , (que l'on note) $f([a; b])$ est .

Corollaire 1 (Maximum/minimum d'une fonction continue sur un segment).

Soit f une fonction définie et **continue** sur le segment $[a; b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a; b]$. C'est à dire que f atteint un minimum et un maximum sur $[a; b]$.

Proposition 1 (Condition nécessaire).

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert**. Si f admet un extrema local en $x_0 \in I$ alors .

Proposition 2 (Extremum local d'une fonction dérivable.).

Soit une fonction f , dérivable sur un intervalle **ouvert** I . Si sa dérivée alors f admet un extremum local en ce point.

II "Topologie" de $\mathbb{R}^2$

Définition 5 (Boules de $\mathbb{R}^2$).

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ et $r > 0$.

Une boule de centre (x_0, y_0) et de rayon r est l'ensemble des points dont la distance au point (x_0, y_0) est strictement inférieur à r .

$$\mathcal{B}(M_0, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / \quad \quad \quad \}$$

Définition 6 (Ensembles bornés).

On dit que $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ est une partie **bornée** si et seulement si elle est incluse dans une boule.

Définition 7 (Fermés et ouverts : intuition).

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est **ouverte** si et seulement si elle n'a pas de bord. On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est **fermée** si et seulement si son complémentaire est ouvert.

Définition 8 (Fermés et ouverts : formalisation).

On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ est **un ouvert** si et seulement si en tout point de $\mathcal{O}$ il existe une boule incluse dans $\mathcal{O}$. On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est **un fermé** si et seulement si son complémentaire est ouvert



Attention : Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés.

Définition 9 (Extrema global).

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet un **maximum** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. On dit alors que le réel $f(x_0, y_0)$ est le maximum de f sur $\mathcal{D}$ et que f **atteint son maximum** en (x_0, y_0) .

On le note

$$\max_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y) \quad \max_{\mathcal{D}} f$$

- On dit que f admet un **minimum** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$. On dit alors que le réel $f(x_0, y_0)$ est le minimum de f sur $\mathcal{D}$ et que f **atteint son minimum** en (x_0, y_0) .

On le note

$$\min_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y) \quad \min_{\mathcal{D}} f$$

- On appelle **extremum** de f sur $\mathcal{D}$ un minimum ou un maximum de f sur $\mathcal{D}$.

Définition 10 (Extrema local).

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $x_0 \in \mathcal{D}$.

- On dit que f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) si et seulement si il existe une boule $\mathcal{B}$ centrée en (x_0, y_0) telle que la restriction de f à $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ atteint un minimum en (x_0, y_0) .
- On dit que f admet un **maximum local** en x_0 si et seulement si il existe une boule $\mathcal{B}$ centrée en (x_0, y_0) telle que la restriction de f à $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ atteint un maximum (x_0, y_0) .

Remarque : Si f admet un minimum global en (x_0, y_0) alors c'est aussi un minimum local, mais la réciproque est fausse.

III Extrema d'une fonction de deux variables

Théorème 2 (fonction continue sur un fermé borné).

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que $\mathcal{U}$ est fermé et borné et que f est **continue**.

Alors f atteint un maximum et un minimum global sur $\mathcal{U}$.

III.1 Points critiques

Théorème 3 (Condition nécessaire).

Si une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **ouvert** $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$, alors

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Définition 11 (Point critique).

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$. **point critique** est un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$ tel que $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

III.2 Conditions suffisantes pour l'existence d'un extremum.

Théorème 4 (Utilisation de la matrice Hessienne).

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres

de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en (x_0, y_0) .

Exercice 1.

Trouver les extrema locaux de $f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$ sur $\mathbb{R}^2$

Définition 12 (Point selle).

Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un point col pour f .

Exercice 2.

Étudier les points critiques de $f(x, y) = xy(x + y - 1)$ sur $\mathbb{R}^2$.