EXTREMA DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

Préliminaires

Exercice 1.
Dessiner les ensembles suivants. Lorsque la frontière n'appartient pas à l'ensemble la dessiner en pointillés. Deviner si c'est un ouvert, un fermé ou aucun des deux.

1. $\mathcal{E}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0\right\}$
2. $\mathcal{E}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\right\}$
3. $\mathcal{E}_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\right\}$
4. $\mathcal{E}_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^2\right\}$
5. $\mathcal{E}_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 4\right\}$
6. $\mathcal{E}_6 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + (y+1)^2 < 1\right\}$

Exercice 2 (DL et points critiques)**.**
Soit f une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de (x_0, y_0). On suppose que (x_0, y_0) est un point critique pour f et que la matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est

$$\nabla^2(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

avec λ et μ deux réels.

1. Écrire le DL à l'ordre deux de f au voisinage de $(x_0\ , y_0)$ en fonction de μ et λ.
2. On suppose que l'on peut assimiler f à son DL sans le terme en $\varepsilon(h, k)$, et que λ et μ sont positifs. Que se passe-t'il ?
3. Étudier les deux autres cas vus en cours.

Étude de points critiques

Exercice 3.
Trouver les points critiques des fonctions suivantes et étudier leur nature.

1. $f(x, y) = x^2 + 2(y-1)^2$
2. $f(x, y) = 2x^3 - 2xy + y^2$
3. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x-y}$
4. $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$

Problèmes

Exercice 4.
Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & [0;\,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \end{array}$$

1. On pose $K = [0;\,1]^2$. On admet que K est fermé, montrez qu'il est borné.
2. En déduire que f atteint un minimum et un maximum global sur K.
3. On note $\mathcal{O} =]0;\,1[^2$ l'intérieur de K et on admet que $\mathcal{O}$ est ouvert. Trouver le seul point critique de f à l'intérieur de $\mathcal{O}$ et montrez que c'est un maximum local.

   Montrer que la valeur de ce maximum local est $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.
4. On pose pour $t \in [0;\,1]$

   $$\varphi(t) = f(t, 0)$$

   (a) Montrer que pour tout $t \in [0;\,1]$ $f(t, 0) = \varphi(t)$
   (b) Calculer $\varphi(t)$ pour $t \in [0;\,1]$.
   (c) Montrer que tout $t \in [0;\,1]$ on a $\varphi(t) \leqslant \frac{1}{2}$.
   (d) En déduire que le maximum global dont on a prouvé l'existence à la question 2, ne peut pas être sur le bord à gauche ou en bas du carré K.

5. On pose pour $t \in [0;\, 1]$, $\psi(t) = f(1,t)$
   (a) Étudier les variations de ψ et en déduire que son maximum est $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$.
   (b) En déduire que f ne peut pas atteindre son maximum ni sur le bord droit, ni sur le bord haut de K.
6. Ou se trouve le maximum de f ?

Exercice 5 (EDHEC 2006)**.**
Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. (a) Donner les commandes SCILAB permettant de tracer la nappe représentative de cette fonction.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (c) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\dfrac{1}{6},\, \dfrac{1}{6}\right)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
3. (a) Développer $2(x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4})^2 + \dfrac{3}{2}\left(y - \dfrac{1}{6}\right)^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{y}$$

   (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) \geqslant -\dfrac{1}{6}$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 6 (EDHEC 2005)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x,y) = x\,\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}$

1. Comment faire tracer la surface représentative de cette fonction par SCILAB ?
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f
   (b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
4. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
5. (a) Montrer que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x,y) \geqslant x\,\mathrm{e}^{x}$.
   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (ECRICOM 2009 (adapté))**.**
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi\,(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall\,(x,y) \in\,]0;\, +\infty[\, \times\,]0;\, +\infty[\,, \quad f\,(x,y) = \mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy)$$

On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Etude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi\,(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi\,(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi\,(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :
$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$
6. Proposer un programme en SCILAB permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}. On utilisera le procédé de dichotomie.

Extrema de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

1. Donner les commandes SCILAB permettant de tracer la surface représentative de la fonction f
2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
3. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x, et y strictement positifs
$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\ \partial_2 f(x,y) = 4f(x,y) + \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$
4. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
5. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et établir que :
$$\begin{cases} \partial_1^2 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \partial_2^2 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \partial_{1,2}^2 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$$
6. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$? Si oui, en donner sa nature (maximum on minimum)
7. De même, f présente-t-elle un extremum local sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$?