Devoir Maison n° 1

À rendre le 13/09/23

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On appelle " épreuve " la séquence suivante :
On tire une boule de l'urne, puis :

- Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n - ième épreuve.
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
R_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne. "
B_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne. "

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.
2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier naturel non nul n , $P(Y_n = 2)$.
4. On pose pour tout entier naturel non nul n , $u_n = P(Y_n = 1)$.
   (a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
   $$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$
   Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?
   (c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.
   En déduire v_n en fonction de n et de v_1,
   Etablir enfin que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2\,(\dfrac{2}{3})^n - \dfrac{2}{3^n}$.
   (d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.
5. Calculer l'espérance de Y_n.
6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.
   (a) Donner $Z(\Omega)$.
   (b) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   Exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.
   (c) En déduire la loi de Z.