Correction du DM n° 1

Le 13/09/23

Exercice

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On appelle " épreuve " la séquence suivante :
On tire une boule de l'urne, puis :

- Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n - ième épreuve.
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
R_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne. "
B_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne. "

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.
2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier naturel non nul n , $P(Y_n = 2)$.
4. On pose pour tout entier naturel non nul n , $u_n = P(Y_n = 1)$.
   (a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \frac{2}{3}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
   $$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$
   Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?
   (c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.
   En déduire v_n en fonction de n et de v_1,
   Etablir enfin que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2\,(\frac{2}{3})^n - \frac{2}{3^n}$.
   (d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.
5. Calculer l'espérance de Y_n.
6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.
   (a) Donner $Z(\Omega)$.
   (b) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   Exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.
   (c) En déduire la loi de Z.

1. Les valeurs possibles de Y_1 sont $Y_1 = 2$ si on a tiré une boule bleue et $Y_1 = 1$ si on a tiré une boule rouge

$$[Y_1 = 2] = B_1 \qquad [Y_1 = 2] = R_1$$

   Donc

$$\mathrm{P}(Y_1 = 2) = \mathrm{P}(B_1) = \frac{1}{3} \qquad \mathrm{P}(Y_1 = 1) = \mathrm{P}(R_1) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{Y_1(\Omega) = \{1, 2\} \text{ et } \mathrm{P}(Y_1 = 2) = \mathrm{P}(B_1) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathrm{P}(Y_1 = 1) = \mathrm{P}(R_1) = \frac{2}{3}}$$

2. Il y a initialement 2 boules rouges, et on ne fait qu'en enlever, on n'en rajoue jamais.

$$\boxed{Y_n(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}}$$

3. L'évènement $[Y_n = 2]$ est réalisé si et seulement si à toutes les épreuves précédentes on n'a tiré que des boules bleues.

$$[Y_n = 2] = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap B_n$$

   Les événements ne sont pas indépendants donc i faut utiliser le théorème des probabilités composées

$$\mathrm{P}(Y_n = 2) = \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}_{B_1}(B_2) \cdot \mathrm{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \cdots \mathrm{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \cdot \mathrm{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

   Or si $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est réalisé, l'urne n'a pas été modifiée,et donc et contient deux boules rouges une boule bleue.

$$\mathrm{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{1}{3}$$

   Donc

$$\boxed{P(Y_n = 2) = \frac{1}{3^n}}$$

4. On pose pour tout entier naturel non nul$n$, $u_n = P(Y_n = 1)$.

   (a) $[Y_1 = 2]$, $[Y_1 = 1]$, forment un système complet d'évènement. ($Y_1 = 0$ étant impossible car on n'a retiré aux maximum qu'une bille rouge) en utilisant le théorème des probabilités totales.

$$\mathrm{P}(Y_2 = 1) = \mathrm{P}(Y_1 = 1)\,\mathrm{P}_{Y_1=1}(Y_2 = 1) + \mathrm{P}(Y_1 = 2)\,\mathrm{P}_{Y_1=2}(Y_2 = 1)$$

   Or si on suppose que $[Y_1 = 1]$ est réalisé, l'urne est composée d'une boule rouge et de deux boules bleues, pour que l'urne reste inchangée il faut tirer une boule bleue

$$\mathrm{P}_{Y_1=1}(Y_2 = 1) = \frac{2}{3}$$

   De même si on suppose que $[Y_1 = 2]$ est réalisé, l'urne est composée de 2 boules rouges et d'une boule bleue, pour que l'urne perde une boule rouge il faut tirer une boule rouge

$$\mathrm{P}_{Y_1=2}(Y_2 = 1) = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3},\ u_2 = \frac{2}{3}}$$

(b) $[Y_n = 0]$, $[Y_n = 1]$, $[Y_n = 2]$ forment un système complet d'évènement. En utilisant le théorème des probabilités totales.

$$\mathrm{P}(Y_{n+1} = 1) = \mathrm{P}(Y_n = 0)\,\mathrm{P}_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1) + \mathrm{P}(Y_n = 1)\,\mathrm{P}_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1) + \mathrm{P}(Y_n = 2)\,\mathrm{P}_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1)$$

Comme précédemment

$$\mathrm{P}_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3} \qquad \mathrm{P}_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$$

De plus comme on ne rajoute pas de boules rouges

$$\mathrm{P}_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1) = 0$$

Comme on sait que $\mathrm{P}(Y_n = 2) = \dfrac{1}{3^n}$

$$\mathrm{P}(Y_{n+1} = 1) = 0 + u_n\frac{2}{3} + \frac{1}{3^n}\cdot\frac{2}{3}$$

$\square$

(c) $\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} \text{ et la formule est vrai pour } n = 1 \text{ (cf. question précédente)}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} && \text{définition de } (v_n)\\
&= \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} && \text{début de la question} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right)\\
&= \frac{2}{3}v_n && \text{définition de } (v_n)
\end{aligned}$$

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite géométrique de raison } \tfrac{2}{3} \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^*\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} v_1}$$

Attention : le premier rang est v_1, donc on introduit un décalage dans l'exposant !

$v_1 = u_1 + \dfrac{2}{3^1} = \dfrac{4}{3}$ Donc pour $n \geqslant 2$ $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\dfrac{4}{3} = 2\dfrac{2^n}{3^n}$ et comme $u_n = v_n - \dfrac{2}{3^n}$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*\ u_n = 2\,(\frac{2}{3})^n - \frac{2}{3^n}}$$

(d) On a pour $n \geqslant 2$

$$1 = \mathrm{P}(Y_n = 0) + \mathrm{P}(Y_n = 1) + \mathrm{P}(Y_n = 2)$$

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2\ \mathrm{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{3^n} - 2\,(\frac{2}{3})^n + \frac{2}{3^n}}$$

5. Calculer l'espérance de Y_n.
   Y_n étant à support fini elle admet une espérance

$$E(Y_n) = 0\,\mathrm{P}(Y_n = 0) + 1\,\mathrm{P}(Y_n = 1) + 2\,\mathrm{P}(Y_n = 2)$$

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{2^{n+1}}{3^n}}$$

6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.
   (a) Donner $Z(\Omega)$.
   La dernière boule rouge ne peut pas apparaitre lors de la première épreuve
   $$\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus 0, 1}$$
   (b) On retire la dernière boule au tirage k si il reste une boule rouge au tirage $k-1$ (i.e. $[Y_{k-1} = 1]$) et qu'il ne reste plus de boule rouge au tirage k (i.e. $[Y_k = 0]$)
   $$\boxed{[Z = k] = [Y_k = 0] \cap [Y_{k-1} = 1]}$$
   (c)
   $$\mathrm{P}(Z = k) = \mathrm{P}(Y_{k-1} = 1)\, \mathrm{P}_{Y_{k-1}=1}(y_k = 0)$$
   Or si on suppose que $[Y_{k-1} = 1]$ est réalisé alors l'urne est constitué de deux boules bleues et d'une boule rouge.
   $$\mathrm{P}_{Y_{k-1}=1}(y_k = 0) = \frac{1}{3}$$
   $$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\ \mathrm{P}(Z = k) = \frac{2^{n+1} - 2}{3^{n+1}}.}$$