

EXERCICE 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y) , on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent \mathbb{R} :

$$E = \{M(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $(1 \ -2 \ 1)$, et telle que :

$$A = PD_A P^{-1} \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P , calculer BX_1, BX_2 et BX_3 . En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_B P^{-1}.$$

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}.$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
8. Montrer que B^2 est un élément de E . La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
4. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n .

EXERCICE 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(a) Étudier les variations de la fonction g_0 , définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0 .

(b) Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2 \ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geq 1$.

Calculer soigneusement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

(c) Montrer que, pour $n \geq 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

(d) Montrer enfin que pour tout $n \geq 1$:

$$g_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt.$$

(a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)I_n$$

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité.

On notera F_n la fonction de répartition de X_n .

(b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

(c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

(d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.

(e) Soit $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

(f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

(g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.
- Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?
 - Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.
 - Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.
 - On note H_n la fonction de répartition de Y_n . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = F_n(e^x - 1).$$

- Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n .
- Reconnaître la loi de Y_0 . À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans \mathbb{N} . On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = j] \cap [Y = i])$$

Résultats préliminaires

- On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi. Montrer que X et Y sont échangeables.
- On suppose que X et Y sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P(X = i) = P(Y = i)$$

Étude d'un exemple

Soient n , b et c trois entiers strictement positifs.

Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne. On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
 - On replace la boule dans l'urne et :
 - ★ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
 - ★ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
 - ★ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
 - On pioche à nouveau une boule dans l'urne. On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.
3. (a) Compléter la fonction Python suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def tirage(b,n):
5     r = rd.rand()
6     if ... :
7         res = 2
8     else:
9         res = 1
10    return res

```

- (b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.

Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire X
- `y` : une simulation de la variable aléatoire Y

```
1 def experience (b,n,c,variante):
2     x = tirage (b,n)
3     if variante == 1:
4         if x == 1 :
5             ...
6         else:
7             ...
8     elif variante == 2:
9         ...
10        ...
11        ...
12        ...
13
14    y = tirage ( b , n )
15    return [x,y]
```

- (c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X , la loi de Y et la loi du couple (X, Y) .

Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[P(X=1), P(X=2)]$
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[P(Y=1), P(Y=2)]$
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} P([X = 1] \cap [Y = 1]) & P([X = 1] \cap [Y = 2]) \\ P([X = 2] \cap [Y = 1]) & P([X = 2] \cap [Y = 2]) \end{bmatrix}$$

```
1 import numpy as np
2
3 def estimation(b,n,c,variante,N):
4     loiX = np.zeros(2)
5     loiY = np.zeros(2)
6     loiXY = np.zeros([2,2])
7     for k in range(N):
8         [x , y] = experience( b , n , c , variante )
9         loiX[x-1]= loiX[x-1] + 1
10        ...
11        ...
12    loiX = loiX / N
13    loiY = loiY / N
14    loiXY = loiXY / N
15    return [loiX,loiY,loiXY]
```

- (d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
1 >>>[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
2 >>> [loiX,loiY,loiXY]
3 [array([0.66622, 0.33378]), array([0.66534, 0.333466]),
4 array([[0.49837, 0.16785 ],[0.16697, 0.16681]])]
5
6
7 >>>[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
8 >>> [loiX,loiY,loiXY]
9 [array([0.66544, 0.33456]), array([0.58289, 0.41711]),
10 array([[0.33258, 0.33286 ],[0.25031, 0.08425]])]
11
12 >>>[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
13 >>> [loiX,loiY,loiXY]
14 [array([0.66564, 0.33436]), array([0.66778, 0.33222])
15 ,array([[0.44466, 0.22098 ],[0.22312, 0.11124]])]
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.

On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$0.33 \times 0.33 \simeq 0.11$$

$$0.33 \times 0.41 \simeq 0.14$$

$$0.33 \times 0.58 \simeq 0.19$$

$$0.33 \times 0.66 \simeq 0.22$$

$$0.41 \times 0.66 \simeq 0.27$$

$$0.58 \times 0.66 \simeq 0.38$$

$$0.66 \times 0.66 \simeq 0.44$$

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.

- Donner la loi de X .
- Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- Déterminer la loi de Y .
- Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.