

Corrigé

Total sur 22 points

Exercice 1

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ 10,5 points

1. Déterminer les variations de f , préciser son maximum et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$

f est de la forme e^u avec $u(x) = -\frac{x^2}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -x$ et 1,5 points

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

donc, l'exponentielle étant toujours positive, $f'(x)$ est du signe de $-x$, i.e. du signe opposé à x donc $\forall x \in \mathbb{R}_-, f'(x) \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \leq 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et f admet un maximum en 0 qui vaut $f(0) = e^{-0} = 1$

par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x^2 = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^{-X} = 0$

donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2. Etudier la convexité de la courbe $\mathcal{C}$ représentant f 1,5 points

On dérive à nouveau, f' à l'aide de la formule du produit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - x \left(-x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right) = (-1 + x^2) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

donc $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ qui est un polynôme du second degré, avec $a > 0$ et dont les racines sont -1 et 1

donc $\forall x \in [-1; 1], f''(x) \leq 0$ et $\forall x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[, f''(x) \geq 0$

donc f est convexe sur $] -\infty; -1]$, concave sur $[-1; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$

Nota bene : on peut préciser que f admet deux points d'inflexion en -1 et 1 car f'' s'annule en changeant de signe en ces points.

3. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire le tableau des variations de f' sur $\mathbb{R}_+$ 2 points

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$ donc on pressent (connaissant les croissances comparées), que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ et de manière analogue $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$

mais les croissances comparées nous donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{ax}} = 0$ (avec $a > 0$) donc pour démontrer rigoureusement le résultat, on peut utiliser le théorème des gendarmes :

pour $x \geq 2$, $\frac{x^2}{2} \geq x$ donc $e^{\frac{x^2}{2}} \geq e^x$ (croissance de l'exponentielle)

donc en inversant $0 \leq \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} \leq \frac{1}{e^x}$ et enfin $(x > 0), 0 \leq \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \leq \frac{x}{e^x}$

puis, le signe de f'' nous donne les variations de f' : f' est croissante sur $] -\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$,

et avec $f'(0) = -0 \times e^0 = 0$ et $f(1) = -e^{-\frac{1}{2}}$ on peut donc établir le tableau de variations demandé sur $\mathbb{R}_+$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	$-e^{-\frac{1}{2}}$	0

4. Soit n un entier, $n \geq 1$

2 points

Montrer que l'équation $f(x) = nx$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g_n(x) = f(x) - nx$

soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors g_n est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'_n(x) = f'(x) - n$

or d'après la question 1., $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \leq 0$ et donc $g'_n(x) < 0$ (car $n > 0$)

donc g_n est strictement décroissante et continue (car dérivable) donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x), g_n(0)] =] -\infty, 1]$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

donc par soustraction ($n > 0$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = -\infty$ et $g_n(0) = f(0) - 0 = f(0) = 1$

or $0 \in] -\infty, 1]$ donc 0 admet un unique antécédent par g_n et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$

i.e $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = nx$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$

Puis vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$

1 point

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par définition, $g_n(0) = f(0) - 0 = 1$ et $g_n(1) = f(1) - n = e^{-\frac{1}{2}} - 1$

or $-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} < 1$ et donc $e^{-\frac{1}{2}} - 1 < 0$ i.e. $g_n(1) < 0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

g_n étant continue, $\exists x \in]0; 1[, g_n(x) = 0$ et même $]0; 1[$ car $g_n(0) \neq 0$ et $g_n(1) \neq 0$

or comme montré précédemment, u_n est l'unique solution de cette équation sur $\mathbb{R}_+$

donc $u_n \in]0; 1[$ et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$

5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

1 point

Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) = nu_n$

et d'après 1., f admet 1 pour maximum et par ailleurs f est toujours positive ($f(x) = \exp(\dots)$)

donc $0 \leq nu_n \leq 1$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

or $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $u_n \rightarrow 0$

6. Ecrire une fonction Python d'en-tête `def u(n):` permettant de trouver une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie. 1,5 points

On utilise la méthode habituelle, sachant que le programme dépend de n : pour un entier n fixé en entrée, on cherche à résoudre $f(x) = nx$ en partant avec $a = 0$ et $b = 1$. Attention g_n est décroissante.

```
import numpy as np
def u(n):
    a=0; b=1;
    while b-a>10**(-3):
        m=(a+b)/2
        if np.exp(-m**2/2)-n*m<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

Exercice 2

11,5 points

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

0,5 point

Soit $x > 0$, alors $1 + x > 1$ donc par croissance du logarithme : $\ln(1+x) \geq \ln(1) = 0$

et $x > 0 \Rightarrow \frac{x}{\ln(1+x)} \geq 0$ i.e. $f(x) \geq 0$, par ailleurs $f(0) = 1$ d'où $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \geq 0$ (on pourrait dire > 0 aussi).

2. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$

1,25 points

$x \mapsto 1+x$ $x \mapsto x$ sont continues (et même $\mathcal{C}^\infty$) car polynomiales et $\ln$ est continue ($\mathcal{C}^\infty$) donc par composition et quotient de fonctions continues, f est continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$

de plus d'après le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 :

$\ln(1+x) = x + o(x)$ on déduit que $\ln(1+x) \sim x$

donc par quotient d'équivalents, au voisinage de 0 (et pour $x \neq 0$) : $\frac{x}{\ln(1+x)} \sim \frac{x}{x}$ i.e $f(x) \sim 1$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0

finalement f est continue sur $]0, +\infty[$ et en 0 donc f est continue sur $[0, +\infty[$

3. Etablir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$

0,25 point

Déjà justifié à la question précédente.

4. On pose, pour $x > 0$, $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

- a. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $g(x)$

1,5 points

Remarque préalable : on va considérer que g est définie sur $[0, +\infty[$, ce qui ne pose pas de problème avec la formule (l'énoncé aurait dû le préciser)

On va utiliser (astucieusement) la formule de Taylor-Young pour éviter de manipuler plusieurs o dans la même égalité.

au préalable, on remarque :

$$\forall x > 0, g(x) = \ln(1+x) - \frac{1+x-1}{1+x} = \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x} + \frac{1}{1+x} = \ln(1+x) - 1 + \frac{1}{1+x}$$

on pose $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \frac{1}{1+x}$ alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ donc g aussi, donc

d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0 : $g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$

or $g(0) = \ln(1) - 0 = 0$ et $g(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow g'(x) = u'(x) + v'(x)$ et $g''(x) = u''(x) + v''(x)$

et on connaît les développements limités de u et v au voisinage de 0 (forme $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -1$ pour v) : $u(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x)$ et $v(x) = 1 - x + \frac{2}{2}x^2 + o(x^2)$

donc par définition et unicité des développements limités : $u'(0) = 1, u''(0) = -1, v'(0) = -1$ et $v''(0) = 2$

donc $g'(0) = 0$ et $g''(0) = 1$ donc au voisinage de 0, $g(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

- b. En déduire un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers 0

1,5 points

Pour $x > 0$, on pose $a(x) = x$

donc $f(x) = \frac{a(x)}{u(x)}$ et $f'(x) = \frac{a'(x)u(x) - a(x)u'(x)}{u(x)^2}$ or $a'(x) = 1$ et $u'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{\ln(1+x) - x \times \frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{g(x)}{(\ln(1+x))^2}$$

et au voisinage de 0 :

d'après la question précédente, $g(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $g(x) \sim \frac{x^2}{2}$

de plus $\ln(1+x) \sim x$ donc $(\ln(1+x))^2 \sim x^2$ par propriété sur les puissances entières

d'équivalents, donc par quotient d'équivalents : $f'(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}$ i.e. $f'(x) \sim \frac{1}{2}$

5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

2 points

On va, dans un premier temps montrer que f est dérivable en 0, puis la continuité de f' en 0 :

$$\text{pour } x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x} = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$$

or au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

et donc $x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$; de plus : $\ln(1+x) \sim x$

donc par produit et quotient d'équivalents : $\frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}$ i.e. $\frac{f(x) - f(0)}{x} \sim \frac{1}{2}$

et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

et, d'après la question 4.b., $f'(x) \sim \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$ donc f' est continue en 0

finalement f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, dérivable en 0 et f' est continue en 0, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

Nota bene : on a utilisé $-o(x^2) = o(x^2)$ puisque si une expression est négligeable devant x^2 (i.e. expression sur x^2 tend vers 0) alors son opposée aussi.

6. Déterminer les variations de g puis en déduire celles de f . Préciser la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ 1,5 points

D'après 4.a., $\forall x \geq 0, g(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}$ (forme $\ln(u) + \frac{1}{v}$)

donc $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$

donc $g'(x)$ est un quotient de termes positifs donc $g'(x)$ est positif, donc g est croissante or $g(0) = 0$ (on peut utiliser $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ si on a raisonné sur $]0, +\infty[$)

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq 0$ donc $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) \geq 0$ car $f'(x) = \frac{g(x)}{(\ln(1+x))^2}$ (quotient de termes positifs) donc f est croissante

enfin, au voisinage de $+\infty, f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$ car $\ln(1+x) \sim \ln(x)$

en effet $\ln(1+x) = \ln\left[x\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right] = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ donc $\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{\ln(x)}$ or

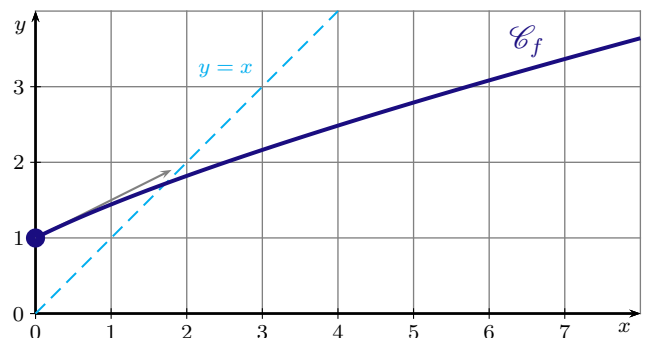
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$ donc par continuité de $\ln$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \ln(1) = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par quotient ($\ll \frac{0}{\infty} \gg$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{\ln(x)} = 0$

finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$ par croissances comparées.

7. Tracer l'allure de la courbe représentative de f 1,5 points

On utilise les informations disponibles (qui sont limitées) : $f(0), f'(0) = \frac{1}{2}$ qui donne le coefficient directeur de la tangente en 0, la croissance de f et enfin la limite en $+\infty$ et le fait que pour $x \geq e-1, f(x) \leq x$



8. Avec Python, définir la fonction f puis la représenter sur un intervalle au choix (choix à justifier). 1,5 points

On choisit l'intervalle $[0; 10]$, la définition de la fonction entraîne une subtilité dans la représentation, il faut rajouter un point pour représenter rigoureusement.

On utilise dans le programme le $+$ qui permet de concaténer les tableaux de valeurs.

Une variante est possible avec `x=np.linspace(0,10,100)` et `y=[f(a) for a in x]`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return x/np.log(1+x)
x=[0] # pour le point en 0
x1=np.linspace(0.01,10,100)
x=x+x1
y=[1] # pour f(0)
y1=f(x1)
y=y+y1
plt.plot(x,y)
plt.show()
```