ECG 2 - Mathématiques appliquées **Mathématiques** **DS n°1** - 27 septembre 2025

Corrigé *Total sur 74 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points*

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - échauffement *2 points*

Soit $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 2, 1)$, et $u_3 = (2, 3, 2)$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Comme (u_1, u_2, u_3) est une famille à trois éléments et que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

alors $\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 2, 1) + \lambda_3(2, 3, 2) = (0, 0, 0)$ donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

finalement, par substitution, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (u_1, u_2, u_3) est une famille libre

et $\mathrm{Card}(u_1, u_2, u_3) = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

variante : on peut aussi dès le début faire $L_1 - L_3$ et on trouve d'emblée $\lambda_1 = 0$ (puis on poursuit la résolution).

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \ln(1 + x)$

Par ailleurs, on pose $a_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < f(x) < x$ *2 points*

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par composition de fonctions $\mathscr{C}^1$ (ln et polynôme).

de plus, $f = \ln(u)$ avec $u(x) = 1 + x$, donc $\forall x \geqslant 0, f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{1+x} \geqslant 0$ (car $x \geqslant 0$ donc f est croissante

par ailleurs, pour $\forall x > 0, x + 1 > 1$ donc $\ln(1 + x) > 0$ par croissance stricte du logarithme

Option A pour $f(x) < x$: posons $g(x) = x - f(x)$ pour $x \geqslant 0$

pour $x > 0, g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

on a nécessairement : $\forall x > 0, g(x) > g(0)$, et comme $g(0) = 0$, $\boxed{\forall x > 0, x > \ln(1 + x)}$

Option B (mais inachevée à cause de l'inégalité stricte) : ln est une fonction concave, elle est donc « en-dessous de chacune de ces tangentes » en particulier celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation :

$y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1) = \dfrac{1}{1}(x - 1) + 0 = x - 1$

i.e. $\forall x > 0, \ln(x) \leqslant 1 + x$ et donc en posant $u = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + u, \forall u > -1, \ln(1 + u) \leqslant u$

reste le problème de l'inégalité stricte et on pourrait évoquer le fait qu'il n'y a égalité que pour $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$ (au point de tangence), mais nous ne disposons pas d'une telle propriété.

2. **a.** En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement décroissante et strictement positive. *3 points*

Nous ne pouvons pas nous dispenser de récurrence (immédiate ici) pour la bonne définition et de fait nous sommes obligés d'inclure la positivité pour l'hérédité,

pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « a_n est bien défini et $a_n > 0$ »

Initialisation : $P(0)$ est vraie car a_0 est bien défini et $a_0 > 0$ par définition ($a_0 = 1$)

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
alors par hypothèse $a_n > 0$ donc $a_{n+1} = f(a_n)$ est bien défini et d'après la question précédente $f(a_n) > 0$ i.e. $a_{n+1} > 0$ donc $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

on aurait pu inclure la décroissance dans la récurrence, on le fait en dehors ici :
d'après la question précédente, $\forall x > 0, f(x) < x$ et d'après ce que nous venons de montrer $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) < a_n$ i.e. $a_{n+1} < a_n$ donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (et strictement positive).

b. Quelle est la limite ℓ de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? *1,5 points*

D'après les résultats précédents, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers un réel ℓ et de plus $\ell \geqslant 0$ par passage à la limite dans l'inégalité $a_n \geqslant 0$
donc, f étant $\mathscr{C}^1$ donc a fortiori continue, d'après le théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$ enfin, en reprenant les notations de la question précédente, on obtient $g(\ell) = \ell - \ln(1+\ell) = 0$ ce qui n'est possible que pour $\ell = 0$ (car $g(x) > 0$ pour $x > 0$) : d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$

3. **a.** Déterminer un équivalent de $x - \ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0 *1 point*

D'après les développements limités usuels, $\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$

donc $x - \ln(1+x) \underset{x\to0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ (par définition $o\left(x^2\right) = -o\left(x^2\right)$), donc $\boxed{x - \ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}}$

b. Déterminer un équivalent de $x\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0 *0,5 point*

De même, on déduit, $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$ donc par produit d'équivalents $\boxed{x\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x^2}$

c. En déduire que : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$ *1,5 points*

$\forall x > 0, \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ donc d'après les deux résultats précédents, par quotient d'équivalents : $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}}$

car si une des deux fonctions équivalentes admet une limite finie au point considéré, l'autre admet la même limite (et l'équivalent, i.e. la limite, étant valable en 0, cela l'est a fortiori en 0^+).

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, b_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$

a. Quelle est la limite de b_n quand n tend vers $+\infty$? *1,5 points*

Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ donc $b_n = \dfrac{1}{\ln(1+a_n)} - \dfrac{1}{a_n}$

or d'après **3.c.** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$ et d'après **2.b.** $a_n \to 0^+$ (on peut dire 0^+ car $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$)

donc par composition $\dfrac{1}{\ln(1+a_n)} - \dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{2}$ i.e. $\boxed{b_n \to \dfrac{1}{2}}$

b. On admet le résultat suivant : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \ell$

Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k$ et en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 2$ *2,5 points*

Par télescopage $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{a_n} - 1$ dont on déduit : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) = \frac{1}{na_n} - \frac{1}{n}$

alors, d'après le résultat admis dans l'énoncé (car $b_n \to \ell = \frac{1}{2}$), $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} b_k \to \frac{1}{2}$

donc d'après l'égalité $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{na_n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ et donc par addition de limites $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{na_n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + 0$

i.e. $\displaystyle\frac{1}{na_n} \to \frac{1}{2}$ donc par inverse de limite (non nulle) : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 2}$

c. En déduire un équivalent simple de a_n quand n tend vers $+\infty$ et déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$

Par définition des équivalents, on en déduit $na_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$ *2 points*

donc par quotient d'équivalents $\displaystyle\frac{na_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ i.e. $\boxed{\displaystyle a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$

or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est une série à termes positifs de même que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et d'après les résultats sur les séries de Riemann ($\alpha = 1 \leqslant 1$) la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge donc par opération $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n}$ diverge

donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ divergent}}$

(vers $+\infty$)

Exercice 3

On rappelle que $e \approx 2,7$ et $e^2 \approx 7,4$ à 10^{-1} près.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ *0,5 point*

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de même pour f par produit et composition de fonctions continues (respectivement $\mathscr{C}^1$).

2. Montrer que f est dérivable en 0 *1,5 points*

Par définition de f, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = e^{-\sqrt{x}}$

or $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ donc par continuité de $x \mapsto e^x$, $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\sqrt{x}} = e^0 = 1$ i.e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0}$ (et $f'(0) = 1$).

3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ *1,5 points*

Il ne s'agit pas rigoureusement d'un résultat de croissances comparées, mais on s'y ramène par composition (avec $u = \sqrt{x}$) : $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2e^{-u} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\right)^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$ i.e. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\sqrt{x}} = 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

4. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire les variations de f *2 points*

$\forall x > 0, f(x) = xe^{u(x)}$ donc $f'(x) = e^{u(x)} + xu'(x)e^{u(x)} = \left(1 - \dfrac{x}{2\sqrt{x}}\right)e^{-\sqrt{x}} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)e^{-\sqrt{x}}$

car $u(x) = -\sqrt{x}$ et donc $u'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

on en déduit (car $e^{-\sqrt{x}} > 0$), pour $x \in \mathbb{R}_+$: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \dfrac{\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$ (par croissance des fonctions carré et racine sur $\mathbb{R}_+$), donc f est croissante sur $]0;4]$ (et même $[0;4]$ car $f'(0) = 1$ d'après **2.**) et décroissante sur $[4,+\infty[$ (et même strictement à chaque fois)

5. Justifier que f admet un maximum m vérifiant $\dfrac{1}{2} < m < 1$ *1 point*

D'après l'étude des variations ci-dessus, f étant croissante sur $[0;4]$ et décroissante sur $[4,+\infty[$, f admet un maximum en 4 qui vaut $m = f(4) = 4e^{-2}$ et comme, d'après l'énoncé, $4 < e^2 < 8$, on a (fonction inverse strictement décroissante sur $]0,+\infty[$), $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{e^2} > \dfrac{1}{8}$ et donc $1 > \dfrac{4}{e^2} > \dfrac{1}{2}$ i.e. $\boxed{\dfrac{1}{2} < m < 1}$

6. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ *1 point*

Nous avons déjà montré que f est dérivable en 0 et $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, reste donc à montrer que f' est continue en 0, or d'après **4.**, $\forall x > 0, f'(x) = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)e^{-\sqrt{x}}$

donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \left(1 - \dfrac{0}{2}\right)e^0 = 1 = f'(0)$ d'après la valeur trouvée en **2.**

donc $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$ (car $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable en 0 et f' continue en 0)

7. Etudier la convexité et les éventuels points d'inflexion de f *2,5 points*

En posant pour $x > 0, v(x) = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$ alors $\forall x > 0, f'(x) = v(x)e^{u(x)}$ avec les notations précédentes

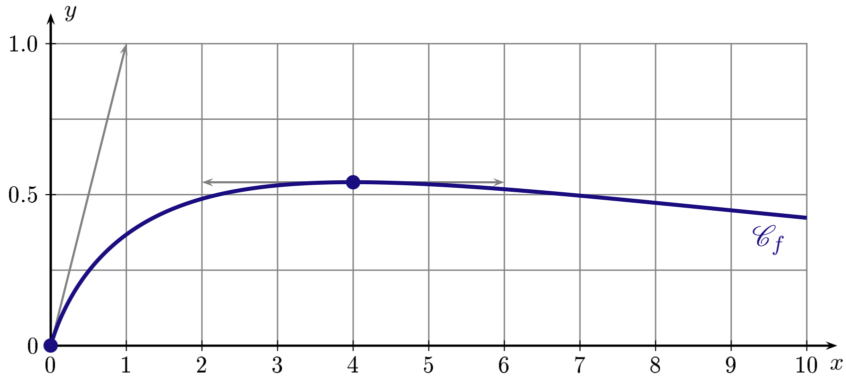
$$\text{donc } \forall x > 0, f''(x) = v'(x)e^{u(x)} + v(x)u'(x)e^{u(x)} = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]e^{u(x)}$$

$$= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)e^{u(x)} = \left(-\frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\right)e^{u(x)} = \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\frac{e^{u(x)}}{4}$$

donc $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{\sqrt{x}} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$ (car $\sqrt{x}>0$) $\quad \sqrt{x} \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant 9$ (par croissance des fonctions carré et racine sur $\mathbb{R}_+$) de même $f''(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 9$ donc f est concave sur $]0;9]$ (même $[0;9]$ en fait), convexe sur $[9,+\infty[$ et admet un point d'inflexion en $x=9$ où f'' s'annule en changeant de signe.

8. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, sur l'intervalle $[0;10]$

On utilise les informations disponibles : $f(0)$, le maximum pour $x=4$ (proche de $\frac{1}{2}$), $f'(0)=1$ qui donne le coefficient directeur de la tangente en 0, les variations de f, la limite en $+\infty$ et l'étude de convexité même si pour la partie $x \geqslant 5$ la courbe est quasiment confondue avec une droite. *1,5 points*



9. Soit n un entier, $n \geqslant 2$ *2,5 points*

Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que $a_n<4<b_n$

Sur $[0;4]$: f est strictement croissante et continue donc, d'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $[0;4]$ sur $f\langle[0;4]\rangle=[0,m]$

de plus, pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{n} \in [0,m[$ (car $m>\dfrac{1}{2}$), donc $\dfrac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f sur $[0;4[$ i.e. l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une unique solution a_n sur $[0,4]$ et même $[0,4[$ car $f(4)=m \neq \dfrac{1}{n}$

Sur $[4,+\infty[$: f est strictement décroissante et continue donc induit une bijection de $[4,+\infty[$ sur $f\langle[4,+\infty[\rangle=]0,m]$ et de même pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} \in]0,m]$, donc l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une unique solution b_n sur $[4,+\infty[$ et même $]4,+\infty[$, finalement $\boxed{a_n \text{ et } b_n \text{ sont les deux solutions de } f(x)=\dfrac{1}{n} \text{ et } a_n<4<b_n}$

10. **a.** Comparer $f(a_n)$ et $f(a_{n+1})$ pour $n \geqslant 2$. En déduire que $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante. *1,5 pts*

Pour $n \geqslant 2$, par définition, $f(a_n)=\dfrac{1}{n}$ et $f(a_{n+1})=\dfrac{1}{n+1}$, donc $f(a_n)>f(a_{n+1})$

en notant g la fonction définie sur $[0;4]$ par $g(x)=f(x)$, on a alors $g(a_n)>g(a_{n+1})$ et comme vu plus haut, g est bijective et croissante, donc g^{-1}, sa réciproque est également croissante

donc $g^{-1}(g(a_n))>g^{-1}(g(a_{n+1}))$ i.e. $a_n>a_{n+1}$ car $\forall x, g^{-1}(g(x))$

i.e. $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement décroissante.}}$

b. Montrer de même que $(b_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante. *1 point*

de même, par définition de $(b_n)_{n\geqslant 2}$, $f(b_{n+1})<f(b_n)$ et en utilisant $h(x)=f(x)$ sur $[4,+\infty[$, bijection strictement décroissante, de même que sa réciproque, on trouve $b_{n+1}>b_n$

i.e. $\boxed{(b_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement croissante.}}$

11. Limite de $(b_n)_{n\geqslant 2}$ *3 points*

On suppose dans un premier temps que b_n admet une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$

En revenant à la définition de b_n, montrer que nécessairement $f(\ell)=0$

Conclure sur la limite de b_n quand n tend vers $+\infty$

Supposons $b_n \to \ell$, alors puisque $\forall n \geqslant 2, b_n>4$, par passage à la limite dans l'inégalité $\ell \in [4,+\infty[$

de plus $f(b_n) \to f(\ell)$ par continuité de f

par ailleurs, comme $f(b_n)=\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n} \to 0$, par unicité de la limite, on aurait $f(\ell)=0$ ce qui n'est pas possible car $f(x)>0$ pour $x>0$

donc notre hypothèse de départ est fausse, i.e. $(b_n)_{n\geqslant 2}$ ne converge pas, donc elle ne peut pas être majorée sinon, étant croissante, elle convergerait d'après le théorème de la limite monotone finalement $(b_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et non majorée donc d'après le théorème de la limite monotone,

$\boxed{(b_n)_{n\geqslant 2} \text{ diverge vers } +\infty}$

12. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *2 points*

$(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et minorée (par 0) donc d'après le théorème de la limite monotone, $(a_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite ℓ' et $(a_n)_{n\geqslant 2}$ étant une suite positive, $\ell' \geqslant 0$

puis de la même manière que le raisonnement pour $(b_n)_{n\geqslant 2}$ (mais pas par l'absurde cette fois) $f(a_n) = \dfrac{1}{n}$ et d'une part $f(a_n) \to f(\ell')$ par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$, d'autre part $\dfrac{1}{n} \to 0$, donc par unicité de la limite, on obtient $f(\ell') = 0$ ce qui imlique $\ell' = 0$ comme vu plus haut, et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$

13. Avec Python

a. Définir la fonction f et la représenter sur l'intervalle $[0; 10]$ *1,5 points*

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
  return x*np.exp(-np.sqrt(x))
x=np.linspace(0,10,100)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

b. Recopier et compléter le programme Python suivant permettant de calculer une valeur approchée de a_n à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie : *1,5 points*

```
def u(n)
  a=0
  b=4
  while (b-a)>10**(-3) :
    m=(a+b)/2
    if f(m)<1/n :
      a=m
    else:
      b=m
  return m
```

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, le programme cherche à résoudre $f(x) = \dfrac{1}{n}$ sur l'intervalle $[0; 4]$ (le programme comporte donc une erreur, il est plus logique de commencer avec $b = 4$) et comme la fonction est croissante sur cet intervalle, quand $f(m)$ sera inférieur à la valeur ciblée, il faudra « resserer l'intervalle à gauche ».

Problème

29 points

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad , \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad , \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad , \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. **a.** Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on a : $P(E_{n+1}) = \dfrac{2}{3}P(E_n) + \dfrac{1}{2}P(F_n)$ *4 points*

Soit $n \geqslant 2$, il faut d'abord montrer que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.
De manière « littéraire » : il y a quatre situations possibles et distinctes pour la succession de deux parties : « gagné, gagné » (E_n), « perdu, gagné » (F_n),« gagné, perdu » (G_n) ou « perdu, perdu » (H_n)

De manière « littérale » : $E_n \cup G_n = (A_{n-1} \cap A_n) \cup (A_{n-1} \cap \overline{A_n}) = A_{n-1} \cap (A_n \cup \overline{A_n}) = A_{n-1} \cap \Omega = A_{n-1}$
de même $F_n \cup H_n = \overline{A_{n-1}}$ et donc $E_n \cup G_n \cup F_n \cup H_n = A_{n-1} \cup \overline{A_{n-1}} = \Omega$
et de manière évidente les événements sont incompatibles, par exemple E_n (qui implique que A_{n-1} est réalisé) et F_n (qui implique que son contraire est réalisé).

Alors, d'après la formule des probabilités totales (toutes les façons de finir sur deux parties gagnantes en étudiant trois parties consécutives) :
$P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(F_n \cap E_{n+1}) + P(G_n \cap E_{n+1}) + P(H_n \cap E_{n+1})$
or $E_n \cap E_{n+1} = (A_{n-1} \cap A_n) \cap (A_n \cap A_{n+1}) = A_{n-1} \cap A_n \cap A_{n+1} = E_n \cap A_{n+1}$ (c'est la situation ou trois parties consécutives sont gagnées)
de même : $F_n \cap E_{n+1} = \left(\overline{A_{n-1}} \cap A_n\right) \cap (A_n \cap A_{n+1}) = F_n \cap A_{n+1}$ (c'est la situation où sur trois parties consécutives on a les enchainements : perdu, gagné et gagné, gagné)
enfin $G_n \cap E_{n+1} = \left(A_{n-1} \cap \overline{A_n}\right) \cap (A_n \cap A_{n+1}) = A_{n-1} \cap \left(\overline{A_n} \cap A_n\right) \cap A_{n+1} = \emptyset$ (c'est la situation où sur trois parties consécutives on a les enchainements : gagné, perdu et gagné, gagné ; ce qui est impossible)
de même pour $H_n \cap E_{n+1} = \left(\overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}\right) \cap (A_n \cap A_{n+1}) = \overline{A_{n-1}} \cap \left(\overline{A_n} \cap A_n\right) \cap A_{n+1} = \emptyset$
d'où : $P(E_{n+1}) = P(E_n \cap A_{n+1}) + P(F_n \cap A_{n+1}) + 0 + 0 = P(E_n) \times P_{E_n}(A_{n+1}) + P(F_n) \times P_{F_n}(A_{n+1})$
or $P_{E_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ il s'agit de la probabilité de gagner après deux parties consécutives gagnées car E_n est réalisé et de même $P_{E_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ (gagner une partie, après une perdue puis une gagnée)

donc $\boxed{P(E_{n+1}) = P(E_n) \times \dfrac{2}{3} + P(F_n) \times \dfrac{1}{3}}$

b. Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1}), P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$ et $P(H_n)$ *0,5 point*

Comme l'indique l'énoncé on ne justifie pas (mais bien vérifier au brouillon... ou avec la suite de l'énoncé) de même, on trouve :

$$\boxed{P(F_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n), \quad P(G_{n+1}) = \frac{1}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n), \quad P(H_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{2}{3}P(H_n)}$$

c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , *1 point*

on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$. Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Par définition, pour $n \geqslant 2$

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(E_{n+1}) \\ P(F_{n+1}) \\ P(G_{n+1}) \\ P(H_{n+1}) \end{pmatrix} \text{ et } MU_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n) + 0 + 0 \\ 0 + 0 + \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n) \\ \frac{1}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n) + 0 + 0 \\ 0 + 0 + \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{2}{3}P(H_n) \end{pmatrix}$$

et grâce aux résultats des questions précédentes (valables pour $n \geqslant 2$), on trouve bien sur les lignes respectives de MU_n : $P(E_{n+1}), P(F_{n+1}), P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ d'où l'égalité $\boxed{U_{n+1} = MU_n}$

2. a. Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *1,5 points*

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

On trouve $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

soit $PQ = 10I_4$ donc $P\left(\frac{1}{10}Q\right) = I_2$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{10}Q$

b. Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$ *2 points*

D'après la question précédente : $D = P^{-1}MP = \frac{1}{10}QMP$

d'une part $QM = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

puis $QMP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

donc $D = \frac{1}{10}QMP = \text{Diag}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 1\right)$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$ *2 points*

Au préalable, il faut inverser la formule qui définit D : $D = P^{-1}MP \Rightarrow PD = PP^{-1}MP \Rightarrow PD = I_3MP \Rightarrow PD = MP \Rightarrow PDP^{-1} = MPP^{-1} \Rightarrow PDP^{-1} = MI_3 = M$

Ensuite, on procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : M^n = PD^nP^{-1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow M^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I_3 = PI_3P^{-1}$
ce qui est le cas car $PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
donc par hypothèse $M^n = PD^nP^{-1}$
donc $M^{n+1} = M^n \times M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie donc par théorème de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est vraie, i.e. } M^n = PD^nP^{-1}}$

b. Montrer que : $\forall n \geqslant 2, U_n = M^{n-2}U_2$ *1,5 points*

On procède par récurrence encore ! Pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on définit $Q(n) : U_n = M^{n-2}U_2$

Initialisation : $M^{2-2}U_2 = I_3U_2 = U_2$ donc $Q(2)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on suppose que $P(n)$ est vraie
d'après la question précédente, $U_{n+1} = MU_n$ et par hypothèse $U_n = M^{n-2}U_2$
donc $U_{n+1} = MM^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2 = (M^{n+1-2}U_2$, i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, P(n) \text{ est vraie, i.e. } U_n = M^{n-2}U_2}$

c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$ et $P(H_n)$ *2 points*

Remarque préalable : il est inutile de calculer le produit $M^n = PD^nP^{-1}$ entier. Il suffit d'en calculer la première colonne. Et pour celà de faire le produit par la première colonne de gauche à droite, celle de P^{-1}, puisqu'elle suffit à obtenir la première colonne de D^nP^{-1} qui elle-même suffit à obtenir celle de PD^nP^{-1}. On peut aussi remarquer (ce qui est quasiment la même chose), qu'en multipliant, M^n par ${}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, on obtient la première colonne de M^n, on peut donc faire cette multiplication avec PD^nP^{-1}

On trouve alors que M^n a pour première colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$$ et comme $U_n = M^{n-2}U_2$ et que $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisqu'il a gagné les deux premières parties, U_n est alors la première colonne de M^{n-2} d'où

$$\boxed{\begin{array}{l} P(E_n)=\dfrac{1}{10}\left(-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}+2\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-2}+6\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+3\right)\\ P(F_n)=\dfrac{1}{10}\left(2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-2}-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+2\right)\\ P(G_n)=\dfrac{1}{10}\left(-2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-2}+2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+2\right)\text{ et}\\ P(H_n)=\dfrac{1}{10}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}+2\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-2}-6\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+3\right)\end{array}}$$

d. Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$ de $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$ et $P(H_n)$ *1 point*

Et quand $n \to +\infty$, comme $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{2}$ ont des valeurs absolues strictment inférieures à 1

alors $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}, \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-2}$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(E_n)=\frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n)=\frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n)=\frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n)=\frac{3}{10}}$$

Nota bene : on retrouve que la somme des limites vaut 1 (c'est logique car l'égalité est vérifié pour tout $n \geqslant 1$ car c'est un système complet d'événements).

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a. Avec Python, définir une fonction `SimulX3` qui permet de simuler la variable aléatoire X_3 *1 point*

Il s'agit simplement de simuler une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$ puisque les deux premières ont été gagnées, il y a deux chances sur 3 que la troisième le soit :

```
def SimulX3():
  return rd.binomial(1,2/3)
```

b. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 , exprimer A_k en fonction de E_k et F_k *1 point*

Pour gagner la $k^{\text{ème}}$ partie, le joueur peut avoir gagné ou perdu la $k-1^{\text{ème}}$

autrement dit $A_k = (A_{k-1} \cap A_k) \cup (\overline{A_{k-1}} \cap A_k)$ i.e. $\boxed{A_k = E_k \cup F_k}$

c. En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 , la loi de X_k *1,5 points*

Par définition $P(X_k=1)=P(A_k)=P(E_k)+\mathrm{P}(F_k)$ car les deux événements sont incompatibles, donc d'après les résultats trouvés en **3.c.** : $P(X_k=1)=$

$$\frac{1}{10}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2}+2\left(\frac{1}{6}\right)^{k-2}+6\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+3\right)+\frac{1}{10}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2}-2\left(\frac{1}{6}\right)^{k-2}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+2\right)$$

soit $P(X_k=1)=\dfrac{1}{10}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}+4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2}+5\right)$

et donc $\boxed{X_k \text{ suit une loi de Bernouilli de paramètre } \dfrac{1}{10}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}+4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2}+5\right)}$

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a. Calculer $P([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2, n = 3$ et $n \geqslant 4$ *3 points*

Remarque : ici, les parties ne sont pas indépendantes, donc S_n ne suit pas une loi binomiale !

Comme le joueur a gagné ses deux premières parties

Pour $n = 2$, on a $S_n = 2$ qui est l'événement certain donc $\boxed{P(S_2 = 2) = 1}$

Pour $n = 3$, comme le joueur a gagné les deux premières parties, $(S_3 = 2) = \overline{A_3}$

et $P(S_3 = 2) = 1 - P(A_3) = 1 - \dfrac{1}{10}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 4\left(\dfrac{1}{2}\right) + 5\right) = 1 - \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{-2+12+30}{6}\right) = 1 - \dfrac{40}{10 \times 6}$

soit $\boxed{P(S_3 = 2) = \dfrac{1}{3}}$ (on aurait également dire qu'après avoir gagné deux parties, il y a une chances sur trois de perdre la suivante).

et pour $n \geqslant 4$, $(S_n = 2)$ signifie qu'il n'a pas gagné d'autre partie que les deux premières

donc $(S_n = 2) = \displaystyle\bigcap_{k=3}^{n} \overline{A_k}$ donc d'après la formule des probabilités composées :

$P(S_n = 2) = P\left(\overline{A_3}\right) P_{\overline{A_3}}\left(\overline{A_4}\right) P_{\overline{A_3} \cap \overline{A_4}}\left(\overline{A_5}\right) \dots P_{\overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}}\left(\overline{A_n}\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dots \times \dfrac{2}{3}$

car quand on perd les deux précédentes, la probabilité de perdre la suivante est de $\dfrac{2}{3}$

la probabilité est de $2/3$ de la $5^{\text{ème}}$ à la $n^{\text{ème}}$ partie donc $k - 5 + 1 = n - 4$ fois

et donc $\boxed{P(S_n = 2) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-4} \text{ pour } n \geqslant 4}$

b. Déterminer $P([S_n = n])$ *2 points*

$(S_n = n)$ signifie que le joueur a gagné toutes ses parties donc $(S_n = n) = \displaystyle\bigcap_{k=3}^{n} A_k$

donc d'après la formule des probabilités composées

$P(S_n = n) = P(A_3) P_{A_3}(A_4) P_{A_3 \cap A_4}(A_5) \dots P_{A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dots \times \dfrac{2}{3}$

car le conditionnement précise qu'il a gagné à chaque fois les deux parties précédentes

donc $\boxed{P(S_n = n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}}$

c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3 , écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n *4 points*

X_k compte le nombre de victoire pour la $k^{\text{ème}}$ partie, donc le nombre total de victoires est

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et par linéarité de l'espérance (et sachant que l'espérance d'une loi de Bernoulli est p)

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \sum_{k=3}^{n} E(X_k) = 1 + 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n-2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} + \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{10} \times \frac{-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} + \frac{2}{5} \times \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{n}{2} + 1 - \frac{3}{40}\left(\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{n}{2} + 1 - \frac{1}{40} + \frac{2}{5} + \frac{9}{40}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} - \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

donc $\boxed{E(S_n) = \dfrac{n}{2} + \dfrac{11}{8} + \dfrac{9}{40}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n} - \dfrac{8}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}}$