ECG 2 - mathématiques appliquées Octobre 2025

Chapitre 4 - couples et suites de variables aléatoires discrètes

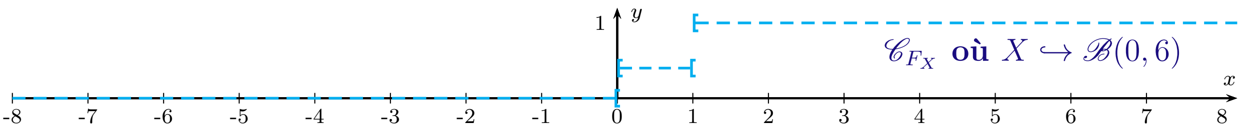
Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :
- définir une fonction de répartition et savoir l'interpréter ☐
- définir et démontrer l'indépendance de plusieurs variables aléatoires ☐
- étudier un couple de variables aléatoires : loi de couple, lois marginales et conditionnelles ☐
- étudier une somme, un produit, un minimum ou un maximum de deux variables aléatoires ☐
- utiliser les propriétés de l'espérance et de la variance de plusieurs variables aléatoires, en particulier les cas d'indépendance et de suites de variables aléatoires ☐
- définir la covariance, le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires et utiliser leurs propriétés ☐

Un complément sur les variables aléatoires : la fonction de répartition

Définitions et propriétés	**Exemples**
Définition : la **fonction de répartition** F d'une variable aléatoire X est la fonction : $x \mapsto P(X \leqslant x)$, définie sur $\mathbb{R}$ on la note également F_X	Remarque : F_X indique « où sont réparties » les valeurs de X « et avec quelles probabilités ». Exemple : si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p)$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ p & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant 1 \end{cases}$
Propriété : la donnée de la fonction de répartition **caractérise la loi de la variable**.	Elle ne donne pas immédiatement l'ensemble $X(\Omega)$ mais $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $F_X(k) - F_X(k-1) = P(X = k)$

Remarque : la fonction de répartition n'est pas continue dans le cas des variables discrètes, mais elle a de nombreuses propriétés :

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ car si $x \leqslant y$ alors $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]$
- $F_X(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ car quand $x \to -\infty$ la probabilité que X soit dans $]-\infty, x]$ tend vers 0
- $F_X(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ car quand $x \to +\infty$ la probabilité que X soit dans $]-\infty, x]$ tend vers 1



Etude de plusieurs variables aléatoires

Formule des probabilitées totales appliquées à des variables aléatoires

Il ne s'agit pas d'une nouvelle propriété mais d'un cas classique d'application de la formule des probabilités totales, lors de l'étude de deux variables aléatoires dépendantes.

Si X et Y sont deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\{[X = j]; j \in X(\Omega)\}$ forme un système complet d'événements, donc :

$$\boxed{\forall i \in Y(\Omega), \quad P(Y = i) = \sum_{j \in X(\Omega)} P([Y = i] \cap [X = j]) = \sum_{j \in X(\Omega)} P_{[X=j]}(Y = i) P(X = j)}$$

Nota bene : la dernière égalité est valable si $\forall j \in X(\Omega), P(X = j) > 0$

1 Indépendance de variables aléatoires

Définition : deux variables aléatoires discrètes X, Y sont dites **in**dépendantes si les événements $[X=x]$ et $[Y=y]$ le sont, pour tous x, y i.e. si $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ $P([X=x] \cap [Y=y]) = P(X=x)P(Y=y)$	Exemple : si X et Y désignent les résultats de deux dés, $P([X=3] \cap [Y=5]) = P([X=3]) \times P([Y=5])$ $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P([X=i] \cap [Y=j])$
Propriété : plus généralement : deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tous intervalles I, J de $\mathbb{N}$: $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P(X \in I)P(Y \in J)$ En particulier, pour tous réels x et y : $P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x)P(Y \leqslant y)$	Avec l'exemple précédent, $P([X \leqslant 2] \cap [Y > 3]) = P(X \leqslant 2)P(Y > 3)$ $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
Définition (pour n variables) : $X_1, \dots X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** si, pour tout $(x_1, \dots x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$: $P\Big([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \dots [X_n = x_n]\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$ Les propriétés précédentes (dans le cas de deux variables) s'appliquent également	Exemple : si $X_1, \dots, X_n$ sont les résultats de n tirages avec remise, alors $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
Propriété : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux	⚠ la réciproque est fausse (cf. *exercice 11*) : trois variables X, Y, Z peuvent être deux-à-deux indépendantes sans qu'elles soient mutuellement indépendantes.

2 Couple de variables aléatoires

X et Y désignent des variables aléatoires réelles discrètes.

2.1 Lois d'un couple, loi marginale, loi conditionnelle

Définitions : la **loi d'un couple** (X, Y) est la donnée des probabilités $\mathbf{P}([X=x] \cap [Y=y])$ pour $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ étant donnée la loi du couple (X,Y), **la loi marginale** de X est donnée par $\forall x \in X(\Omega)$: $P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X=x] \cap [Y=y])$ *on définit de même pour* Y la **loi conditionnelle de** Y **sachant** $[X=x]$ avec $x \in X(\Omega)$ fixé, est donnée par les valeurs $P_{[X=x]}(Y=y)$, où $y \in Y(\Omega)$ *de même pour* X *sachant* $[Y=y]$	Exemples de couples : taille et poids d'un individu, somme et produit des résultats du lancer de deux dés... • la loi marginale est une formule des probabilités totales appliquée avec le S.C.E. $(Y=y)_{y \in Y(\Omega)}$ • la loi conditionnelle peut être utilisée par exemple dans le cas d'une « succession de deux lois » (loi de Poisson puis loi binomiale). • lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut dresser $\boxed{\text{le tableau de la loi du couple}}$, par exemple, avec le lancer de deux dés, où X est la plus petite valeur, Y la plus grande.

3 Opérations classiques sur les variables aléatoires

Les sections somme, minimum et maximum donnent la méthodologie sur ces cas classiques.

3.1 Sommes de variables aléatoires

Si X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour déterminer la loi de $X_1 + X_2$, on peut procéder ainsi :
• pour $i \in \mathbb{N}$, écrire $[X_1 + X_2 = i]$ comme une réunion d'événements disjoints en s'appuyant sur le S.C.E. assoocié à X_1 :

$$[X_1 + X_2 = i] = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Big([X_1 = j] \cap [X_1 + X_2 = i]\Big) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Big([X_1 = j] \cap [X_2 = i - j]\Big)$$

• passer aux probabilité ; par incompatibilité :

$$P(X_1 + X_2 = i) = P\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Big([X_1 = j] \cap [X_2 = i - j]\Big)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} P([X_1 = j] \cap [X_2 = i - j])$$

• comme X_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $P(X_2 < 0) = 0$, donc $P(X_2 = i - j) = 0$ pour $j > i$ et :

$$P(X_1 + X_2 = i) = \sum_{j=0}^{i} P([X_1 = j] \cap [X_2 = i - j])$$

Cas particulier : si X_1 et X_2 sont indépendantes, on obtient :

$$P(X_1 + X_2 = i) = \sum_{j=0}^{i} P(X_1 = j)P(X_2 = i - j)$$

Remarques : on devra refaire à chaque fois le calcul, et l'adapter aux situations. ⚠ en particulier quand X commence à 1 (par exemple si X désigne le numéro d'un tirage) et de même la somme sur j peut s'arrêter à $i - 1$

3.2 Stabilité des lois binomiales et de Poisson

Propriété - somme de deux variables indépendantes suivant des lois binomiales : si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les loi binomiales : $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2, p)$, alors : $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$	Si X_1 donne le nombre de 6 réalisés lors de n_1 lancers d'un dé et X_2 le nombre de 3 lors de n_2 lancers, alors $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, 1/6)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2, 1/6)$ et donc X_1+X_2 le nombre total de 6 et de 3 réalisés lors de ces deux expériences suit la loi $\mathscr{B}(n_1 + n_2, 1/6)$
Propriété - somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson : si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les loi de Poisson, $X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$, alors : $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$	Si X_1, le nombre de saumons, et X_2, le nombre d'aloses, qui passent dans une passe à poissons au cours d'une heure suivent les lois : $X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(5)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(2)$ alors $X_1 + X_2$ le nombre total de poissons (saumons + aloses) suit la loi $\mathscr{P}(7)$

3.3 Loi d'un minimum, d'un maximum

L'idée de la méthode est de **passer par des inégalités** : pour que le maximum de deux valeurs soit inférieur ou égal à n, il faut et il suffit que les deux valeurs le soient (et supérieur pour le minimum).

La méthode s'appuie alors sur le résultat suivant qu'il faut pouvoir redémontrer :

Si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1) = P(X > k - 1) - P(X > k)$$

En effet, $[X \leqslant k - 1] \cup [X = k] = [X \leqslant k]$ puis par incompatibilité des événements.

Remarque : ce résultat est le même que $F_X(k) - F_X(k-1) = P(X = k)$

Méthode : on suppose que X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on pose :

$$Z = \min(X, Y) \qquad T = \max(X, Y)$$

- loi de Z : elle s'obtient en déterminant $Z(\Omega)$ et en utilisant les relations :
  (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [Z > n] = [X > n] \cap [Y > n]$ *remarque préliminaire*
  (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z = n) = P(Z > n-1) - P(Z > n)$ *résultat préliminaire*
  puis on utilise le résultat du **a.** pour les calculs de $P(Z > n-1)$ et $P(Z > n)$
- loi de T : elle s'obtient en déterminant $T(\Omega)$ et en utilisant les relations :
  (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [T \leqslant n] = [X \leqslant n] \cap [Y \leqslant n]$ *remarque préliminaire*
  (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(T = n) = P(T \leqslant n) - P(T \leqslant n-1)$ *résultat préliminaire*
  puis on utilise le le résultat du **a.** pour les calculs de $P(T \leqslant n-1)$ et $P(T \leqslant n)$

Se référer à l'*exercice 14* (exercice type).

3.4 Produit

La loi d'un produit XY se détermine avec la loi d'un couple. Le seul résultat à connaître est le celui sur $E(XY)$ quand X et Y sont indépendantes (cf. plus bas).

3.5 Lemme des coalitions

Propriété : si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, \ldots, X_p$ $(p < n)$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, \ldots, X_n$	Exemple : si X, Y et Z sont des variables mutuellement indépendantes, alors $X^2 + Y^3$ est indépendante de $\ln(Z)$ (si elle existe).

4 Espérance, variance, covariance et coefficient de corrélation linéaire

Pour rappel, $E(X^r)$ si elle existe, soit d'après le théorème de transfert $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$ si elle converge absolument, est appelée moment d'ordre r de X ($r = 1$ ou $r = 2$ en général pour nous).

4.1 Espérance et variance

Propriété - linéarité de l'espérance : soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires et $(a_1, \ldots, a_n)$ des réels, alors : $$E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$$	Remarque : c'est simplement un cas plus général (avec n variables) de la linéarité vue en première année
Théorème de transfert : soit X, Y deux variables aléatoires et f une fonction de deux variables définie sur un domaine contenant $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ la variable aléatoire $Z = f(X, Y)$ admet une espérance si, et seulement si la somme $$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y) P((X = x) \cap (Y = y))$$ est absolument convergente, et dans ce cas, la somme vaut $E(Z) = E(f(X, Y))$	Remarque : pas besoin donc dans ce cas de déterminer la loi de $f(X, Y)$ pour le calcul de son espérance, on « transfère » les lois de X et Y Exemple : si $Z = \min(X, Y)$ alors, sous réserve d'existence, $E(Z) = E(\min(X, Y))$ $= \displaystyle\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \min(x, y) P((X = x) \cap (Y = y))$

Cas d'indépendance

Propriété : si X et Y sont **indépendantes** et admettent une espérance, alors XY admet une espérance et $$E(XY)=E(X)E(Y)$$ cette propriété s'étend à : $$E\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)=\prod_{k=1}^{n}E(X_k)$$ si $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes.	Si X_1 et X_2 donnent les résultats du lancer de deux dés alors, les deux résultats étant indépendants, $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{7}{2}=\dfrac{49}{4}$
Propriété : si X et Y sont **indépendantes** et admettent un moment d'ordre 2, alors $X+Y$ admet un moment d'ordre 2 et $$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$ cette propriété s'étend à : $$V\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}V(X_k)$$ si $X_1,\dots,X_n$ admettent des moments d'ordre 2 et sont mutuellement indépendantes.	On le démontre avec la formule de Kœnig-Huygens (et la linéarité de l'espérance) $V(X+Y)=E\left[(X+Y)^2\right]-[E(X+Y)]^2$ $=E(X^2+2XY+Y^2)-[E(X)+E(Y)]^2$ $=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-E(X)^2-2E(X)E(Y)-E(Y)^2$ $=E(X^2)-E(X)^2+E(Y^2)-E(Y)^2+2(E(XY)-E(X)E(Y))$ soit $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ car par indépendance $E(XY)=E(X)E(Y)$

Variables centrées, réduites, centrées réduites

Pour rappel, si $E(X)=0$, la variable est dite centrée et si $V(X)=1$ la variable est dite réduite.

Propriété : avec X une variable aléatoire, on note $\mu=E(X)$ et $\sigma=\sigma(X)$ (où $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ est l'écart-type), alors $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ est une **variable centrée réduite**.

4.2 Covariance

Définitions : la covariance d'un couple de variables aléatoires (X,Y) est, sous réserve d'existence : $$\begin{aligned}\text{Cov}(X,Y)&=E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)\\&=E(XY)-E(X)E(Y)\end{aligned}$$ si on note $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ les variables centrées : $\text{Cov}(X,Y)=E(\tilde{X}\tilde{Y})$	La covariance est un indicateur des variations couplées : la moyenne du produit des écarts à la moyenne $(x-E(X))(y-E(Y))$ pour chaque (x,y) de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$
Propriété : si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors $X,Y,X+Y$ admettent une variance, (X,Y) admet une covariance, et $$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,\text{Cov}(X,Y)$$	C'est ce que nous avons trouvé plus haut en développant $V(X+Y)$ avec la formule de Kœnig-Huygens (cf. cas de l'indépendance)
Propriété : si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X,Y)=0$ *Nota bene* : on retrouve alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$	C'est immédiat avec $E(XY)=E(X)E(Y)$ quand X et Y sont indépendantes ⚠ la réciproque est fausse.

Propriétés - opérations avec la covariance : pour trois variables X, Y, Z admettant un moment d'ordre 2 : • $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\operatorname{Cov}(X, Y)$ • $\operatorname{Cov}(X, X) = V(X)$ • $\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(Y, X)$ • $\operatorname{Cov}(a, X) = \operatorname{Cov}(X, a) = 0$ pour $a \in \mathbb{R}$ • linéarité à gauche, pour a, b réels : $\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{Cov}(X, Z) + b\operatorname{Cov}(Y, Z)$ • linéarité à droite, pour a, b réels : $\operatorname{Cov}(Z, aX + bY) = a\operatorname{Cov}(Z, X) + b\operatorname{Cov}(Z, Y)$	Quelques éléments de démonstration, on trouve ces résultats car : • $V(-Y) = V(Y)$ et avec la définition $\operatorname{Cov}(X, -Y) = -\operatorname{Cov}(X, Y)$ • par définition $V(X) = E((X - E(X))^2)$ • la définition est symétrique • alors $X = a = E(X)$ donc $E(X) - X = 0$ • l'espérance est linéaire et en développant avec la définition • la covariance est symétrique
Propriété - Inégalité de Schwarz : si X et Y admettent des moments d'ordre 2 $$\lvert \operatorname{Cov}(X, Y)\rvert \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$$	On peut interpréter cette propriété comme : « les variations couplées de X et Y ($\operatorname{Cov}(X, Y)$) sont moindres que le produit des variations ($\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$) »

4.3 Coefficient de corrélation

Définition : avec X et Y deux variables aléatoires, le **coefficient de corrélation** du couple (X, Y) est : $$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$ pour X et Y de variances non nulles.	Comme son nom l'indique, ce coefficient illustre à quel point X et Y sont corrélées. Les cas de corrélation maximale étant un lien affine : $Y = aX + b$ et dans le cas où X et Y sont indépendantes, i.e. « ne sont pas corrélées », alors $\rho(X, Y) = 0$
Propriétés : • $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$ ou $\lvert\rho(X, Y)\rvert \leqslant 1$ • $\lvert\rho(X, Y)\rvert = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ • $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ • $\rho(X, X) = 1$ • $\rho(aX + b, Y) = \rho(X, Y)$ pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$	Eléments de démonstration ou d'interprétation : • c'est une traduction de l'inégalité de Schwarz • ce sont les cas de corrélation maximale • du fait de la symétrie de la covariance • car $\operatorname{Cov}(X, X) = V(X) = (\sigma(X))^2$ • du fait des propriétés de la covariance car $\operatorname{Cov}(aX + b, Y) = a\operatorname{Cov}(X, Y) + \operatorname{Cov}(b, Y)$ et $\operatorname{Cov}(b, Y) = 0$
Définition et propriété : la **droite de régression linéaire** est la droite d'équation $y = ax + b$ où a et b sont choisis tels que $E((Y - (aX + b))^2)$ soit minimal. Cette droite a pour équation : $$\frac{y - \mu}{\sigma_Y} = \rho\frac{x - m}{\sigma_X}$$ où $m = E(X)$, $\mu = E(Y)$, $\rho = \rho(X, Y)$	Comme nous le verrons en statistiques, on peut toujours modéliser une relation entre deux variables par une fonction affine et le coefficient de corrélation est alors la meilleure approximation de coefficient directeur entre les variables centrées réduites Y^* et X^*