Sur l'énoncé :
- comprendre que N est une variable aléatoire, donc ne pas confondre X et X_n
- lorsque, pour $n \in N^*$, $[N = n]$ est réalisé, on obtient $X = X_n$
- en particulier : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$: $P_{[N=n]}(X = k) = P_{[N=n]}(X_n = k)$
- et le lemme des coalitions donne X_n et N indépendantes, donc avec les notations précédentes : $P_{[N=n]}(X = k) = P_{[N=n]}(X_n = k) = P(X_n = k)$

Partie I

2. Réécrire la formule donnée avec des probabilités (cf. dernier point de l'énoncé) et reconnaître la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements lié à N

3. **a.** Remarquer (et justifier !) que $N \leqslant m$

b. Utiliser la formule du **2.**

c. Calcul.

d. Calcul.

4. **a.** Utiliser la formule du **2.**

Partie II

Nota bene : $\binom{y}{k}$ n'est pas un coefficient binomial, car y peut être réel.

5. On attend une fonction récursive, qui suppose de trouve une formule. Sinon (mais moins rémunéré), plusieurs manières possibles, la plus simple utilise une boucle `for`.

6. **a.** Faute de formule (hors programme désormais), on montrer le résultat avec une récurrence (sur n) et une IPP : poser $u'(t) = (x-t)^n$ (attention, x est fixé ici) et $v(t) = (1-t)^{-(c+n+1)}$

b. Fait en TD.

c. Tous les points sont très abordables.

d. Passage à la limite.

7. La suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité ssi tous les p_k sont positifs et leur somme vaut 1 : $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$

8. Il s' agit de calculer : $P(Y + 1 = k) = P(Y = k - 1) = \dots$

9. Calcul.

Partie III

10. **a.** Récurrence

b. Il s'agit de montrer que $p_k = e^{-b}\dfrac{b^k}{k!}$

c. i. Rédaction précise, attention. Supposer qu'il n'existe pas un entier ℓ tel que $p_\ell = 0$ Justifier que $p_k > 0$ pour tout k et montrer que la relation du **10.a.** contredit cette propriété. Conclure.

ii. Utiliser la relation $p_{r+1} = 0$

iii. Penser que la somme des probabilités vaut 1

d. Pour les deux points, revenir aux définitions données (loi binomiale négative et coefficient binomial généralisé).

11. Calcul.