Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :

• définir les termes valeur propre et vecteur propre

• déterminer si un réel est valeur propre ou non d'une matrice

• déterminer des sous-espaces propres

• utiliser des familles de vecteurs propres

• montrer qu'une matrice est diagonalisable et diagonaliser une matrice

• interpréter les racines d'un polynôme annulateur d'une matrice

La réduction (= diagonalisation pour nous) d'une matrice A consistera à trouver une matrice D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espace propre

Définitions et propriétés	Exemples
$\frac{\text{D\'efinitions}}{\text{s'il existe }X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X\neq 0_{n,1} \text{ et }\lambda\in\mathbb{R}}$ tel que $\frac{MX=\lambda X}{\text{alors}}$ alors $X \text{ est appel\'e } \mathbf{vecteur \ propre} \text{ de la matrice }M$ et λ est appel\'e $\mathbf{valeur \ propre} \text{ de la matrice }M$ L'ensemble des valeurs propres de M est noté $\text{Sp}(M)$, appel\'e $\mathbf{spectre} \text{ de }M$	Exemple: avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors $MX = 3X$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M est 3 est valeur propre
Propriété : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Corollaire : 0 est valeur propre de $M \Leftrightarrow M$ n'est pas inversible.	$ \underline{\text{Exemple}} : \text{avec } M \text{ ci-dessus} $ $ M - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui n'est pas inversible} $

Remarque (et rappel) : une matrice carrée M n'est pas inversible lorsque le système homogène associé admet des solutions non nulles (système non de Cramer). En particulier, toute matrice ayant une ligne (ou une colonne) qui est combinaison linéaire des autres n'est pas inversible.

 \triangleright donc $\lambda\in\mathrm{Sp}(M)$ si, et seulement si le système $MX=\lambda X$ n'est pas de Cramer.

Sans autre information, trouver des valeurs propres et des vecteurs propres consiste donc à résoudre (en partie) un système à paramètre (λ) .

 $\frac{\text{D\'efinition}}{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)}: \text{ avec les notations pr\'ec\'edentes, pour } \lambda \in \operatorname{Sp}(M)$ l'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), MX = \lambda X\}$ est appelé **sous-espace propre** de M associ\'e à la valeur propre λ , et noté $E_{\lambda}(M)$ est un espace vectoriel c'est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $(M - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$ (d'inconnue X) $\frac{\operatorname{Exemple}}{MX} : \operatorname{toujours avec} M \text{ plus haut}$ $MX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$ $E_3(M) = \begin{cases} x \\ -x \end{cases}, x \in \mathbb{R} \end{cases} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Matrices diagonales et triangulaires

Propriété:

les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont les éléments sur sa diagonale.

« Démonstration » :

si a est un coefficient diagonal, alors $M-aI_n$ est triangulaire avec un coefficient diagonal nul, elle n'est donc pas inversible, i.e. a est valeur propre.

Polynômes annulateurs

<u>Définition</u>: un **polynôme** $P = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ est dit **annulateur** d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si : $A^2 = I_2$ i.e. $A^2 - I_2 = 0_2$ de polynôme annulateur de A

$$P(M) = \sum_{k=0}^{N} a_k M^k = 0_n$$

 $A^2 = I_2$ i.e. $A^2 - I_2 = 0_2$ donc $x^2 - 1$ est un

Propriété:

si P est un polynôme annulateur de M, alors $\lambda \in \operatorname{Sp}(M) \Longrightarrow P(\lambda) = 0$

i.e. $Sp(M) \subset \{ \text{ racines de } P \}$

Exemple:

avec la matrice A ci-dessus, les seules valeurs propres possibles sont -1 et 1 (mais reste à le vérifier).

Donc:

les valeurs propres de M sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur.

Propriétés sur les familles de vecteurs propres, sous-espaces propres

Propriété:

p vecteurs propres associés à p valeurs propres deux-à-deux distinctes forment une famille libre. Corollaire: une matrice d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes.

Exemple: avec la matrice M plus haut,

et $\binom{1}{1}$ forment donc une famille libre, car

ce sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1 et 3

Propriété: une concaténation de familles libres de sous-espaces propres différents forme une famille libre (de vecteurs colonnes).

Exemple : avec A_1 de l'exercice 1, $\begin{array}{cccc} {}^{t}\left(\overline{1} & -\overline{1} & 0\right), {}^{t}\left(1 & 0 & -1\right), {}^{t}\left(1 & 1 & 1\right) \\ \text{forment une famille libre} \end{array}$

Propriété: la somme des dimensions des sousespaces propres est inférieure ou égale à l'ordre de la matrice

Les vecteurs propres sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et une famille libre de cet espace vectoriel (de dimension n) a au plus n éléments.

Remarque : dans la pratique, on cherchera souvent à connaître cette somme des dimensions des $\overline{\text{sous-espaces}}$ propres. Si elle vaut n (cf. plus bas), la matrice sera diagonalisable.

2

Matrices diagonalisables

<u>Définition</u>: deux matrices carrées A et B sont dites **semblables** s'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$

$$M = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}MP = D \Leftrightarrow MP = PD$$

Exemple:

avec M vue plus haut, M est diagonalisable car

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : comme on le voit sur l'exemple, (C_1, \ldots, C_n) les colonnes de la matrice P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M

Dans la pratique, comment fait-on pour diagonaliser une matrice?

L'exemple ci-dessus (facile) nous donne globalement la méthode.

- 1. On trouve les valeurs propres.
- 2. On trouve une base de vecteurs propres, plus précisément une concaténation de bases des sousespaces propres.
 - \triangleright cela donne la matrice P dont chacune des colonnes est un vecteur propre de cette base;
 - \triangleright puis on écrit la matrice D qui contient en diagonale les valeurs propres associées à chaque vecteur propre (et rangées dans le même ordre que les vecteurs propres dans la matrice P).
- 3. on conclut, en faisant les calculs matriciels : MP d'un coté, PD de l'autre ; et l'égalité nous permet d'affirmer que M est diagonalisable.

Remarque : à l'étape $2 \text{ si } \ll \text{ le compte est bon } \gg$, i.e. la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à l'ordre de la matrice, nous savons que cela va fonctionner.

Le résultat sous-jacent (hors programme) est que : $\ll M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $M \gg$.

<u>Corollaire</u> (de ce résultat hors-programme et donc hors-programme aussi) : si la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas égale à l'ordre de la matrice (la somme est alors inférieure), alors la matrice n'est pas diagonalisable. Nous ne savons donc pas vraiment montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable, sauf dans un cas particulier que nous verrons en exercice.