

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet comporte 5 pages, numérotées 1/5, 2/5... 5/5

Dans tout le devoir, on suppose que les importations suivantes sont faites sous Python :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
```

Questions proche du cours.

1) Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a-b \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base. Quelle est sa dimension ?

2) Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (-2, 1, -1)$ et $w = (4, 1, 3)$. Déterminer le rang de la famille (u, v, w) dans $\mathbf{R}^3$.

3) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y - z - t = 0 \text{ et } x - y = 0\}$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

b) Soit $u = (1, 1, 2, 0)$ et $v = (1, 1, 0, 2)$. Montrer que (u, v) est une base de F .

4) Soit A une matrice réelle carrée d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$. Soit :

$$\mathcal{L} = \{L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R}) \mid LA = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})}\}.$$

Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne A contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n .

On tire au hasard une boule dans l'urne A , et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si $X = k$, on place $n - k$ boules numérotées 0 et k boules numérotées de 1 à k dans une urne B .

On notera que l'urne B contient exactement n boules en tout, où seul le numéro 0 peut être éventuellement représenté plus d'une fois.

On effectue alors un tirage dans l'urne B et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée dans l'urne B .

Partie A : généralités.

- 1) Reconnaître la loi de X , donner son espérance et sa variance.
- 2) Déterminer $Y(\Omega)$.
- 3) Pour $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et de j . On distinguera les cas $k < j$ et $k \geq j$.
- 4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier avec soin la réponse.

Partie B : exemple pour $n = 3$.

- 5) Déterminer la loi du couple (X, Y) et en déduire la loi de Y .
- 6) Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$.

Partie C : le cas général.

Dans cette partie, on revient au cas général où n est un entier naturel non nul quelconque.

- 7) a) Montrer que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(Y = j) = \frac{n - j + 1}{n^2}$.
 b) En déduire la valeur de $\mathbf{P}(Y = 0)$.
- 8) Montrer les relations suivantes :

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- 9) Montrer que : $\mathbf{E}(Y) = \frac{(n+1)(n+2)}{6n}$.
- 10) Montrer que : $\mathbf{E}(XY) = \frac{(n+1)(n+2)(3n+1)}{24n}$.
- 11) En déduire : $\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n+1)(n+2)(n-1)}{24n}$.
- 12) Simulation informatique.

- a) Compléter la fonction suivante permettant de simuler une réalisation du couple (X, Y) pour une valeur de l'entier naturel non nul n donnée en entrée :

```

1  def XY(n):
2      x=...
3      z=rd.randint(1, n+1)
4      if z<=n-x:
5          y=...
6      else:
7          y=...
8      return (x, y)
9  
```

- b) On considère la fonction écrite en Python suivante :

```

1  def mystere(n):
2      liste=[0]*(n+1)
3      for i in range(10000):
4          x, y=XY(n)
5          liste[y] += 1/10000
6      return liste
7  
```

Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer et pourquoi ?

Exercice 2.

On suppose que toutes les variables aléatoires dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On considère deux variables aléatoires X et Y , indépendantes, de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On notera $q = 1 - p$. On pose :

$$S = X + Y, \quad U = \min(X, Y), \quad \Delta = Y - U.$$

On rappelle que : pour $k \in \mathbf{N}^*$, $[U > k] = [X > k] \cap [Y > k]$

1) Loi de S .

a) Déterminer $S(\Omega)$.

b) Justifier que, pour $i \in S(\Omega)$, $[S = i] = \bigcup_{j=1}^{i-1} [X = j] \cap [Y = i - j]$.

En déduire la loi de S .

c) Donner l'espérance et la variance de S .

d) Justifier que $\text{Cov}(X, S) = \mathbf{V}(X)$, puis préciser cette valeur.

2) Loi de U .

a) Montrer que, pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X > k) = q^k$ et en déduire $\mathbf{P}(U > k)$.

b) Montrer que, pour $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(U > k - 1) - \mathbf{P}(U > k)$.

c) En déduire que U suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$, puis donner les valeurs de $\mathbf{E}(U)$ et de $\mathbf{V}(U)$ en fonction de q .

3) Loi de Δ .

a) Préciser $\Delta(\Omega)$.

b) Justifier que : $[\Delta = 0] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} [Y = i] \cap [X \geq i]$ puis montrer que : $\mathbf{P}(\Delta = 0) = \frac{1}{1 + q}$.

c) Montrer que, pour $j \in \mathbf{N}^*$: $[\Delta = j] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} [X = i] \cap [Y = i + j]$ puis que $\mathbf{P}(\Delta = j) = \frac{pq^j}{1 + q}$.

d) Montrer que Δ admet une espérance et que : $\mathbf{E}(\Delta) = \frac{q}{p(1 + q)}$.

e) En utilisant le théorème de transfert, montrer que $\Delta(\Delta - 1)$ admet une espérance et la calculer. En déduire que :

$$\mathbf{E}(\Delta^2) = \frac{q}{p^2}$$

puis que Δ admet une variance et calculer $\mathbf{V}(\Delta)$.

f) En déduire la valeur de $\text{Cov}(Y, U)$.

4) Application à un jeu.

On considère une pièce donnant PILE avec une probabilité p .

Un joueur joue selon les règles suivantes :

- Il mise m euros, avec $m > 0$,
- il répète un lancer de la pièce et il note X le nombre de lancers qu'il lui a fallu pour obtenir PILE,
- puis il recommence une deuxième fois en notant Y le nombre de lancers qu'il lui a fallu pour obtenir à nouveau PILE.

- Si $Y \leq X$, alors il ne gagne rien (et il perd donc sa mise), et, sinon, il récupère $Y - X$ euros.

On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Justifier que $G = \Delta - m$.

b) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ sur $[0, 1[$.

En déduire que, pour une mise m fixée, il existe une seule valeur q_m de q pour laquelle le jeu est équilibré.

c) On rappelle que la commande `rd.geometric(p, k)` renvoie une liste de longueur k contenant des réalisations indépendantes de la loi géométrique de paramètre p .

Compléter la fonction `Python` suivante simulant le gain du joueur avec une mise m et une valeur $q \in]0, 1[$ donnée.

```

1  def Gain(m, q):
2      G=-m
3      X=rd.geometric(...)
4      if ...:
5          G=...
6      return G
7

```

Exercice 3.

Partie I : étude d'une fonction.

- 1) On considère l'équation différentielle : $(E) : \forall t \in \mathbf{R}, \quad y'(t) + y(t) = t + 1$, d'inconnue y , fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
 - a) Trouver une solution particulière de (E) polynomiale de degré 1.
 - b) En déduire toutes les solutions de (E) .
 - c) Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Dans la suite de l'exercice, on pose, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = t + e^{-t}$.

- 2) Déterminer le tableau des variations de f sur $\mathbf{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
En déduire que $\forall t \in \mathbf{R}, f(t) \geq 1$.

On pose alors, pour $t \in \mathbf{R}$, $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

- 3) Déterminer le tableau des variations de g sur $\mathbf{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 4) a) Vérifier que : pour tout réel $t \geq 0$

$$(f(t))^2 - 2f'(t) = e^{-2t} + t^2 + 2(t+1)e^{-t} - 2$$

b) Etudier les variations de $\psi : t \mapsto t^2 + 2(t+1)e^{-t}$ sur $\mathbf{R}_+$ et en déduire que : $\forall t \in \mathbf{R}_+, \psi(t) \geq 2$.

c) En déduire que : pour tout réel $t \geq 0$, $\frac{f'(t)}{f(t)^2} \leq \frac{1}{2}$, puis que $|g'(t)| \leq \frac{1}{2}$

- 5) On pose, pour $t \in \mathbf{R}_+$, $h(t) = g(t) - t$.
-

- a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
- b) Déterminer la limite de h en $+\infty$ et en déduire que h s'annule une et une seule fois en un réel $\alpha > 0$.
- c) Montrer que $\alpha < 1$.

Partie II : étude d'une suite récurrente.

On pose $u_0 = 1$, et, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = g(u_n) = \frac{1}{u_n + e^{-u_n}}$.

- 6) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > 0$.
- 7) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
- 8) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. Justifier alors la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et préciser sa limite.
- 9) a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour $n \geq -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$, u_n est une valeur approchée de α à ε près.
- b) Compléter la fonction Python suivante permettant de donner une valeur approchée de α à **epsilon** près.

```
1  def ValeurApprochee(epsilon):  
2      n=0; u=1  
3      while ...  
4          n ...  
5          u =...  
6      return ...  
7
```

Cours : (résultats)

$$1) E = \text{Vect}(A, B) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et (A, B) en est une famille génératrice.

Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $aA + bB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})}$ donne directement $a = b = 0$, donc (A, B) est une famille libre.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et (A, B) en est une base.

$$\dim E = 2.$$

$$2) \text{ Soit } F = \text{Vect}(u, v, w). \quad w = 2u - v. \text{ Donc } F = \text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v).$$

(u, v) est une famille libre donc (u, v) est une base de F .

Conclusion : $\text{rg}(u, v, w) = \dim F = 2$.

$$3) \text{ a) On résout le système } \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ d'inconnue } X = {}^t(x, y, z, t) \text{ pour obtenir l'ensemble solution :}$$

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On en déduit :

$$F = \text{Vect}(a, b) \quad \text{avec} \quad a = (1/2, 1/2, 1, 0), \quad b = (1/2, 1/2, 0, 1)$$

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et (a, b) en est une famille génératrice.

On a même (a, b) libre, donc (a, b) est une base de F et $\dim F = 2$.

$$b) \quad u = 2a \text{ et } v = 2b, \text{ donc } F = \text{Vect}(u, v).$$

De plus, comme (a, b) est libre, il en est de même pour (u, v) : (u, v) est une base de F .

4) Voir exercice du cours.

• $\mathcal{L} \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})} \in \mathcal{L}$.

• Soit L_1 et L_2 deux matrices lignes de $\mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soit $L = \lambda L_1 + L_2$. Alors $LA = \lambda L_1 A + L_2 A$.

Mais comme $L_1 A = L_2 A = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})}$, on obtient $LA = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})}$ et $L \in \mathcal{L}$.

• Conclusion : $\mathcal{L}$ est non vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$

Exercice 1.**Partie A.**

- 1) X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
- 2) $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
- 3) Si $j > k$, $\mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = 0$.

$$\text{Si } j \leq k : \mathbf{P}_{X=k}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ \frac{n-k}{n} & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

- 4) Si $n = 1$, $X = Y = 1$ variables certaines et indépendantes.
Si $n \geq 2$, $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = 0$ alors que $\mathbf{P}(X = 1) > 0$ et $\mathbf{P}(Y = 2) > 0$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

Partie B.

- 5) Tableau des valeurs de $\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$ pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$:
On remarquera que $Y \leq X$ et, pour $1 \leq j \leq i$: $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{3} \mathbf{P}_{X=i}(Y = j) = 1/9$.

$i \backslash j$	0	1	2	3	loi de X
1	2/9	1/9	0	0	1/3
2	1/9	1/9	1/9	0	1/3
3	0	1/9	1/9	1/9	1/3
loi de Y	1/3	1/3	2/9	1/9	1

- 6) Transfert : $\mathbf{E}(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ij \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{1}{9} \times (1 + 2 + 4 + 3 + 6 + 9) = \frac{25}{9}.$$

$$\text{On calcule : } \mathbf{E}(X) = 2 \text{ et } \mathbf{E}(Y) = \frac{10}{9} \text{ donc : } \text{Cov}(X, Y) = \frac{25}{9} - \frac{20}{9} = \frac{5}{9}.$$

Partie C.

- 7) a) En utilisant le SCE : $\{[X = i]; i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}_{[X=i]}(Y = j).$$

Comme $\mathbf{P}_{[X=i]}(Y = j) = 0$ pour $j > i$, il reste :

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=j}^n \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}_{[X=i]}(Y = j) = \sum_{i=1}^j \frac{1}{n^2} = \frac{n-j+1}{n^2}$$

- b) On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = 0) &= 1 - \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(Y = j) \\ &= 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (n - j + 1)\end{aligned}$$

Dans la somme, on pose $i = n + 1 - j$, $i_{\min} = 1$ (pour $j = n$) et $i_{\max} = n$ pour $j = 1$, donc :

$$\mathbf{P}(Y = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = 1 - \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n-1}{2n}}.$$

8) Le plus simple est de faire des récurrences.

Pour la première relation, on note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \sum_{j=1}^n j^2$ et $\mathcal{P}_n : \ll S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg$.

- $\mathcal{P}_1$ est vraie car $S_1 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.
- Si, pour une valeur $n \in \mathbf{N}^*$ donnée, $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6).$$

En remarquant que $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, on obtient : $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ soit $\mathcal{P}_{n+1}$.

On a donc montré, par récurrence, que $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$

Pour la deuxième relation, on note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $T_n = \sum_{j=1}^n j^3$ et $\mathcal{Q}_n : \ll T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \gg$.

- $\mathcal{Q}_1$ est vraie car $T_1 = 1 = \frac{1 \times 2^2}{4}$.
- Si, pour une valeur $n \in \mathbf{N}^*$ donnée, $\mathcal{Q}_n$ est vraie, alors :

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4).$$

On obtient : $T_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ soit $\mathcal{Q}_{n+1}$.

On a donc montré, par récurrence, que $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$

$$9) \mathbf{E}(Y) = \sum_{j=1}^n j \mathbf{P}(Y = j) = \frac{1}{n^2} \left((n+1) \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n j^2 \right).$$

$$\text{Donc } \mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$\text{ce qui donne : } \mathbf{E}(Y) = \frac{(n+1)}{6n} (3(n+1) - (2n+1)) = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{6n}}$$

10) Transfert : en n'oubliant pas que $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$ si $j > i$:

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i j \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \right).$$

Ensuite : pour $i \geq j \geq 1$, $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}_{[X=i]}(Y = j) = \frac{1}{n^2}$ donne :

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \left(\sum_{j=1}^i j \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \times \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n (i^2 + i^3)$$

Avec les formules de la question 7 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(XY) &= \frac{1}{2n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2}{(n+1)^2} 4 \right) \\ &= \frac{n+1}{24n} (2(2n+1) + 3n(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{24n} (3n^2 + 7n + 2) \end{aligned}$$

On remarque que $3n^2 + 7n + 2 = (3n+1)(n+2)$ ce qui donne bien $\mathbf{E}(XY) = \frac{(n+1)(n+2)(3n+1)}{24n}$

$$11) \text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{(n+1)(n+2)(3n+1)}{24n} - \frac{n+1}{2} \times \frac{(n+1)(n+2)}{6n}$$

On met en facteur dès qu'on peut :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n+1)(n+2)}{24n} (3n+1 - 2(n+1)) = \frac{(n+1)(n+2)(n-1)}{24n}$$

12) a)

```

1  def XY(n):
2      x=rd.randint(1, n+1)
3      z=rd.randint(1, n+1)
4      if z<=n-x:
5          y=0
6      else:
7          y=z-n+x
8      return (x, y)
9  
```

b) La liste renvoyée est la fréquence des réalisations des événements $[Y = 0]$, $[Y = 1] \dots$ donc on estime les valeurs de $\mathbf{P}(Y = 0)$, $\mathbf{P}(Y = 1) \dots$, soit la loi de Y .

Exercice 2.

Questions ** (classique mais calculatoire) : 3b, 3c, 3d, 3e, 3f.

Le reste est en catégorie * : application directe (essentiellement du cours).

1) a) $\boxed{S(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket}$ car $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

b) Pour $i \geq 2$, $[S = i] = [X + Y = i] = \bigcup_{j=1}^{+\infty} [X = j] \cap [X + Y = i] = \bigcup_{j=1}^{+\infty} [X = j] \cap [Y = i - j]$.

Mais $[Y = i - j] = \emptyset$ quand $j \geq i$, donc :

$$\boxed{[S = i] = \bigcup_{j=1}^{i-1} [X = j] \cap [Y = i - j]}$$

C'est une réunion d'événements deux-à-deux incompatibles, on en déduit :

$$\forall i \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad \mathbf{P}(S = i) = \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{P}([X = j] \cap [Y = i - j])$$

et comme X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad \mathbf{P}(S = i) &= \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{P}(X = j) \mathbf{P}(Y = i - j) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} p q^{j-1} p q^{i-j-1} \\ &= p^2 q^{i-2} \sum_{j=1}^{i-1} 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(S = i) = (i - 1) p^2 q^{i-2}}$$

c) $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \boxed{\frac{2}{p}}$ par linéarité de l'espérance.

$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ car X et Y sont indépendantes, donc $\boxed{\mathbf{V}(S) = \frac{2q}{p^2}}$.

d) $\text{Cov}(X, S) = \text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y)$ (linéarité à droite).
Or $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$ et $\text{Cov}(X, Y) = 0$ car X et Y sont indépendantes.

Donc : $\boxed{\text{Cov}(X, S) = \mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}}$

2) a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > k) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{+\infty} [X = j]\right) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{j-1} \\
&= p \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{j-1} \\
&= p \times q^k \times \frac{1}{1-q} \\
\mathbf{P}(X > k) &= q^k
\end{aligned}$$

On en déduit : $\mathbf{P}(U > k) = \mathbf{P}([X > k] \cap [Y > k]) = \mathbf{P}(X > k)\mathbf{P}(Y > k)$ par indépendance, donc $\boxed{\mathbf{P}(U > k) = q^k \times q^k = q^{2k}}$.

b) $[U > k-1] = [U \geq k] = [U = k] \cup [U > k]$, donc : $\mathbf{P}(U > k-1) = \mathbf{P}(U = k) + \mathbf{P}(U > k)$ et $\boxed{\mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(U > k-1) - \mathbf{P}(U > k)}$.

c) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(U = k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$.

On en déduit que $\boxed{U \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1 - q^2}$.

$$\boxed{\mathbf{E}(U) = \frac{1}{1-q^2} \text{ et } \mathbf{V}(U) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}}.$$

3) a) $\Delta(\Omega) = \mathbf{N}$ car $Y \geq U$.

b) $[\Delta = 0]$ signifie $Y = U$, donc que le minimum entre Y et X est Y .

On en déduit : $[\Delta = 0] = [X \geq Y]$.

En utilisant la partition $\{[Y = i] ; i \in \mathbf{N}^*\}$:

$$\boxed{[\Delta = 0] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} [Y = i] \cap [\Delta = 0] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} [Y = i] \cap [X \geq Y] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} [Y = i] \cap [X \geq i]}.$$

C'est une réunion d'événements deux-à-deux incompatibles, donc on en déduit :

$$\mathbf{P}(\Delta = 0) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([Y = i] \cap [X \geq i])$$

Comme X et Y sont indépendants :

$$\mathbf{P}(\Delta = 0) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = i)\mathbf{P}(X \geq i)$$

De la question 2a, $\mathbf{P}(X \geq i) = \mathbf{P}(X > i-1) = q^{i-1}$, donc :

$$\mathbf{P}(\Delta = 0) = \sum_{i=1}^{+\infty} pq^{i-1} \times q^{i-1} = p \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)(i-1) = p \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = p \times \frac{1}{1-q^2}.$$

Comme enfin $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$, on obtient : $\boxed{\mathbf{P}(\Delta = 0) = \frac{1}{1+q}}$.

- c) Pour $j \in \mathbf{N}^*$, $[\Delta = j] = [Y = U + j]$ ce qui impose $X < Y$ et $U = X$ donc : $[\Delta = j] = [Y = X + j]$ et, avec la partition $\{[X = i] ; i \in \mathbf{N}^*\}$:

$$[\Delta = j] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} [X = i] \cap [Y = X + j] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} [X = i] \cap [Y = i + j].$$

C'est une réunion d'événements deux-à-deux incompatibles :

$$\mathbf{P}(\Delta = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = i + j])$$

et comme X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Delta = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}(Y = i + j) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p q^{i-1} p q^{i+j-1} \\ &= p^2 q^j \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} \\ &= p^2 q^j \frac{1}{1 - q^2} \\ &= \boxed{p q^j \frac{1}{1 + q}} \end{aligned}$$

- d) Y et U admettent des espérances, donc $\Delta = Y - U$ aussi avec :

$$\mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(U) = \frac{1}{p} - \frac{1}{(1 - q^2)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p(1 + q)} = \boxed{\frac{q}{p(1 + q)}}$$

- e) $\Delta(\Delta - 1)$ admet une espérance si, et seulement si : $\sum_{j \geq 2} j(j - 1) \frac{p}{1 + q} q^j$ converge absolument.

Ici, pour $j \geq 2$, $j(j - 1) \frac{p}{1 + q} q^j = \frac{p q^2}{1 + q} \times j(j - 1) q^{j-2}$.

$\sum_{j \geq 2} j(j - 1) q^{j-2}$ est une série géométrique dérivée d'ordre 2 convergente car $|q| < 1$, donc

$\Delta(\Delta - 1)$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(\Delta(\Delta - 1)) = \frac{p q^2}{1 + q} \times \frac{2}{(1 - q)^3} = \frac{2 q^2}{p^2 (1 + q)}$$

On en déduit : Δ^2 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\Delta^2) &= \mathbf{E}(\Delta(\Delta - 1)) + \mathbf{E}(\Delta) \\
 &= \frac{2q^2}{p^2(1+q)} + \frac{q}{p(1+q)} \\
 &= \frac{q}{p^2(1+q)} \times (2q + p) \\
 &= \frac{q}{p^2(1+q)} \times (q + 1) \\
 &= \boxed{\frac{q}{p^2}}
 \end{aligned}$$

Δ admet un moment d'ordre 2 donc une variance et :

$$\mathbf{V}(\Delta) = \mathbf{E}(\Delta^2) - \mathbf{E}(\Delta)^2 = \frac{q}{p^2} - \frac{q^2}{p^2(1+q)^2}$$

donc :

$$\mathbf{V}(\Delta) = \frac{q}{p^2(1+q)^2} \times ((1+q)^2 - q) = \boxed{\frac{q(1+q+q^2)}{p^2(1+q)^2}}$$

f) $\mathbf{V}(\Delta) = \mathbf{V}(Y - U) = \mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(U) - 2 \text{Cov}(Y, U).$

On en déduit :

$$2 \text{Cov}(Y, U) = \mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(U) - \mathbf{V}(\Delta)$$

On remarque que $\mathbf{V}(\Delta) = \mathbf{E}(\Delta^2) - \mathbf{E}(\Delta)^2 = \mathbf{V}(Y) - \mathbf{E}(\Delta)^2$, et $\mathbf{V}(U) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2} = \frac{q^2}{p^2(1+q)^2}$

donc :

$$2 \text{Cov}(Y, U) = \frac{2q^2}{p^2(1+q)^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\text{Cov}(Y, U) = \frac{q^2}{p^2(1+q)^2}}$$

4) a) Si $Y \leq X$ alors $G = -m$ et $\Delta = 0$.

Si $Y > X$ alors $G = (Y - X) - m = (Y - U) - m = \Delta - m$.

Conclusion : $\boxed{G = \Delta - m}$.

b) Si $f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ sur $[0, 1[$, on a $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0, 1[$, avec le tableau :

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	0	$+\infty$

$\mathbf{E}(G) = \mathbf{E}(\Delta) - m = f(q) - m$ et le jeu est équilibré si, et seulement si $\mathbf{E}(G) = 0$, soit $f(q) = m$. D'après le tableau des variations de f , f est strictement croissante et continue sur $[0, 1[$, donc réalise une bijection entre $[0, 1[$ et $[0, +\infty[$.

Pour une valeur $m > 0$ fixée, il existe une seule valeur $q_m \in]0, 1[$ telle que $f(q_m) = m$ soit $\mathbf{E}(G) = 0$.

D'ailleurs, on peut calculer cette valeur de q_m en résolvant l'équation $\frac{x}{1-x^2} = m$ qui donne :

$$mx^2 + x - m = 0.$$

$$\text{Discriminant : } \delta = 1 + 4m^2 \text{ et on trouve : } q_m = \frac{\sqrt{4m^2 + 1} - 1}{2m}.$$

- c) Il fallait placer dans $\mathbf{X}$ deux réalisations de la loi géométrique de paramètre p : $\mathbf{X}[0]$ correspondant par exemple à X et $\mathbf{X}[1]$ à Y . On complète en :

ligne 5 : $\mathbf{X} = \text{rd.geometric}(1-q, 2)$

ligne 6 : $\text{if } \mathbf{X}[0] < \mathbf{X}[1] :$

ligne 7 : $\mathbf{G} = \mathbf{G} + \mathbf{X}[1] - \mathbf{X}[0]$: le joueur récupère $X[1] - X[0] = Y - X$ euros.

Exercice 3 (inspiré d'EML 2018).

- 1) a) $\varphi : t \mapsto t$ est une solution de (E) .

- b) Equation homogène : $(E_0) : y' + y = 0$ d'ensemble solution : $\{t \mapsto \lambda e^{-t}; \lambda \in \mathbf{R}\}$.

On en déduit que y est solution de (E) si et seulement s'il existe un réel λ tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad y(t) = t + \lambda e^{-t}$$

- c) Si $\forall t \in \mathbf{R}, \quad y(t) = t + \lambda e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}, y(0) = 1$ impose $\lambda = 1$ donc $t \mapsto t + e^{-t}$ est l'unique solution de (E) valant 1 en 0.

- 2) f est dérivable par somme de fonctions dérivables et $\forall t \in \mathbf{R}, \quad f'(t) = 1 - e^{-t}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

Limites : en $+\infty$: $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ par opérations, en $-\infty$: $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} +\infty$ par croissances comparées.

- 3) $g'(t) = -\frac{f'(t)}{(f(t))^2}$ donc les variations de g sont opposées à celles de f , et les limites se calculent par opérations :

t	$-\infty$	0	$+\infty$			
$g'(t)$		+	0	-		
g		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- 4) a) Calcul.

- b) Pour tout $t \geq 0, \psi'(t) = 2t(1 - e^{-t})$.

t	0	$+\infty$
$\psi'(t)$		+
ψ	2	$\nearrow$

ψ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ et $\psi(0) = 2$, donc : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R}_+, \psi(t) \geq 2}$.

c) On en déduit : pour $t \in \mathbf{R}_+$, $f(t)^2 - 2f'(t) \geq 0$, et donc $\frac{f'(t)}{f(t)^2} \leq \frac{1}{2}$.

Comme $|g'(t)| = \frac{f'(t)}{f(t)^2}$, on obtient : $\forall t \in \mathbf{R}_+, |g'(t)| \leq \frac{1}{2}$.

5) a) $h' = g' - 1 < 0$ sur $\mathbf{R}_+$ donc h est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

b) $h(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} h = -\infty$.

h est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ donc h est bijective de $\mathbf{R}_+$ vers $h(\mathbf{R}_+) =]-\infty, 1]$.

Comme $0 \in h(\mathbf{R}_+)$, il existe un et un seul réel $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $h(\alpha) = 0$.

c) $h(0) = 1$ et $h(1) = g(1) - 1 < 0$, donc $\boxed{0 < \alpha < 1}$.

Partie 2.

6) D'après le tableau des variations de g , $g(u_n) > 0$, donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} > 0$ et $u_0 > 0$ donne : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_n > 0}$.

7) Pour tout $t \geq 0$, $|g'(t)| \leq \frac{1}{2}$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbf{N}, |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Comme $g(\alpha) = \alpha$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

8) Raisonnement par récurrence : pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $P(n) : \ll |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \gg$.

• $P(0)$ est vraie car $\alpha < 1$ donne $|1 - \alpha| \leq 1$.

• Supposons que, pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, $P(n)$ soit vraie. Alors, d'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$$

et donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat par récurrence.

$\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; on en déduit, d'après le théorème d'encadrement, que $u_n - \alpha \rightarrow 0$ donc $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha}$

9) a) $1/2^n \leq \varepsilon \iff n \geq -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$ et donc, dans ce cas, $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$: u_n est une valeur approchée de α à ε près.

b)

```
import numpy as np

def valeur_approchee(epsilon):
    n=0; u=1;
    while n<-np.log(epsilon)/np.log(2)
        n=n+1
        u=1/(u+np.exp(-u))
    return u
```

Par exemple : `valeur_approchee(0.00001)` donne 0.8003176277494883.

Ce mémo donne les **mots-clefs** pour la rédaction lorsqu'on demande la loi d'une variable aléatoire X et que cette loi est usuelle avec une situation concrète (tirage dans une urne, lancer de dé etc.). La question type est : « reconnaître la loi de X . »

Notez qu'on peut montrer que X suit telle ou telle loi en connaissant $X(\Omega)$ et les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$, voir par exemple le minimum de deux variables indépendantes suivant des lois géométriques, exercice proche du cours.

- **Loi uniforme.**

Montrer qu'une variable X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par exemple, c'est montrer/justifier que les issues $1, 2, \dots, n$ sont **équiprobables**, du fait d'un élément de l'énoncé (boules indiscernables, dé équilibré...).

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

- **Loi géométrique.**

Montrer que X suit la loi géométrique de paramètre p , c'est montrer que X correspond au **premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p** .

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Il faudra préciser la loi de Bernoulli sous-jacente : succès, échec, probabilité de succès.

- **Loi binomiale.**

Montrer que X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) , c'est montrer que X correspond au **nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p** .

On peut *alternativement* observer que :

$$X = \sum_{j=1}^n T_j$$

où $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Il faudra préciser la loi de Bernoulli sous-jacente : succès, échec, probabilité de succès.

Bien sûr, toutes les propriétés de ces lois sont à connaître : espérance, variance, théorèmes associés...