

Devoir à rendre en binôme, obligatoirement.

Exercice 1

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. **a.** Calculer $(A - 2I)(A + 2I)(A - I)$
 b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$

a. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} -2x & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & = & 0 \\ 2x & - & 2z & = & 0 \end{cases}$$

- b.** Déterminer $E_2(A)$

- c.** En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$

3. Déterminer de même une base de $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$, espaces vectoriels définis par :

$$E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$$

4. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}

5. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$

On appelle commutant de A , et on note C_A , l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D , et on note C_D , l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

6. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer : $M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$
8. Déterminer C_D , en utilisant les coefficients des matrices.

9. En déduire : $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

10. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A

Exercice 2

Un mobile se déplace sur un axe d'origine O , et on s'intéressera uniquement aux positions dont les coordonnées sont entières.

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n définit une variable aléatoire (sur un univers Ω).

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$

On admet que T est une variable aléatoire.

1. a. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i
b. Donner la loi de X_1
c. En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T
2. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$
b. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1 - p$
3. a. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$
b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k (1-p)$
En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$

Avec Python, et la bibliothèque `numpy.random` renommée `rd`, on rappelle que `rd.random()` renvoie au hasard un nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$

Compléter le programme Python suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('n='))
X=0
for k in range(1,n+1):
    a=rd.random()
    if a < ... :
        X = .....
    else
        X = .....
print(X)
```

5. a. Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$
b. En déduire que, pour $n \geq 2, E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$

La fin est en option : un peu plus technique mais pour aller au bout du problème.

6. a. Montrer, en utilisant la question 3.a., que : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$
b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p}$

Montrer que $u_{n+1} = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$

- c. En déduire l'expression de u_n , puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n
- d. Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$