

Devoir à rendre en binôme, obligatoirement.

Exercice 1 - exercice 23 de la feuille de T.D. n°4

Exercice 2

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Calculer $4A^3 - 3A$. En déduire un polynôme P annulateur de A
3. Calculer $P(1)$. En déduire une racine de P puis, les autres racines de P
4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P , de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.
6. Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$
On note

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = AX_{n-1}$

- a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$
- b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \frac{1}{3} + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \frac{1}{3} + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

- c. Déterminer les limites respectives u, v, w de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$
- d. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
- e. Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leq 10^{-2}$