Couples et suites de variables aléatoires discrètes

Le programme de première année sur les variables aléatoires, notamment les lois usuelles, doit toujours être connu sur le bout des doigts.

Les nouveautés de ce chapitre visent à étudier conjointement plusieurs variables aléatoires : couples, suites et donc covariance...

- indépendance d'un couple et indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires ;
- lemme des coalitions ;
- loi d'un couple, lois marginales, théorème de transfert dans le cas d'un couple de variables aléatoire, application simple au calcul de l'espérance d'un produit ;
- cas classiques d'étude d'un couple : loi d'une somme de deux variables, d'un minimum ou d'un maximum ;
- stabilité des lois binomiales et de Poisson (pour la somme de deux variables) ;
- espérance d'un produit de variables indépendantes, variance d'une somme de variables indépendantes ;
- covariance, définition et applications : lien avec la variance, covariance de deux variables indépendantes ;
- propriétés de la covariance ;
- inégalité de Cauchy-Schwarz, définition et propriétés du coefficient de corrélation linéaire.

Réduction des matrices

- valeurs propres, spectre, vecteurs propres (définitions avec $AX = \lambda X$ et caractérisation avec $A-\lambda I_n$ non inversible), sous-espaces propres d'une matrice carrée ;
- cas des matrices triangulaires ou diagonales (les éléments diagonaux sont les valeurs propres) ;
- les valeurs propres d'une matrice font partie des racines de tout polynôme annulateur de cette matrice ;
- une concaténation de familles libres de sous-espaces propres différents forment une famille libre ;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice n'excède pas l'ordre de la matrice ;
- matrices semblables, matrices diagonalisables (semblables à une matrice diagonale) ;
- une matrice dont les colonnes constituent une base de vecteurs propres est inversible ;
- si $M = PDP^{-1}$ les colonnes de la matrice P forment une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M ;
- toute matrice symétrique est diagonalisable ;
- utilisation du déterminant pour les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Pour la recherche de valeurs propres, la résolution de systèmes avec un paramètre n'est pas un attendu du programme (on pourra l'aborder sur des cas simples).

Pour la diagonalisabilité, on trouvera les valeurs propres, puis une base de vecteurs propres et de fait les matrices D et P ; et on vérifie enfin que $AP = PD$