

TD 4 - couples et suites de variables aléatoires discrètes

Quelques corrigés (parfois juste des éléments de corrigés).

Rappels : calculs de probabilités, lois usuelles

Exercice 3 - Calculs d'espérances, de variances

1. Une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit la loi suivante :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{\lambda}{k(k+1)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

- a. Déterminer deux réels a, b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

$$a = 1 \text{ et } b = -1$$

- b. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme : $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)}$

En déduire la valeur de λ

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \text{ (somme télescopiques).}$$

$$\text{On en déduit, par passage à la limite : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

$$\text{Par ailleurs, } \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1 \text{ donne : } 1 = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lambda \times 1 \text{ soit } \boxed{\lambda = 1}$$

- c. X admet-elle une espérance ?

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}^*, kP(X = k) = \frac{1}{k+1} \text{ et } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j} \text{ diverge (série de Riemann divergente).}$$

Conclusion : X n'a pas d'espérance

2. Une variable aléatoire Y sur le même espace probabilisé suit la loi : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(Y = k) = \alpha \times \left(r_1^k + r_2^k \right)$

où $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{2}{3}$ et α est une constante réelle.

- a. Déterminer la valeur de α

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1 \text{ donne : } \alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} r_1^k + \sum_{k=0}^{+\infty} r_2^k \right) = 1 \text{ donc } \boxed{\alpha = \left(\frac{1}{1-r_1} + \frac{1}{1-r_2} \right)^{-1} = \frac{1}{5}}$$

- b. Montrer que Y admet une espérance et une variance, que l'on calculera.

Y admet une espérance et une variance si, et seulement si Y admet un moment d'ordre 2

$$\text{Une formule : pour } |r| < 1, \text{ si on pose } S(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 r^k$$

$$\text{on a : } S(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)r^k + \sum_{k=0}^{+\infty} kr^k = \frac{2r^2}{(1-r)^3} + \frac{r}{(1-r)^2}$$

Y admet un moment d'ordre 2 ssi $\sum \alpha k^2 (r_1^k + r_2^k)$ converge, et c'est le cas car cette somme est égale à : $E(Y^2) = \alpha (S(r_1) + S(r_2))$

Conclusion : Y admet une espérance et une variance. Reste à faire les calculs :

- Espérance : $E(Y) = \alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k r_1^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k r_2^k \right) = \alpha \left(\frac{r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{r_2}{(1-r_2)^2} \right) = \frac{8}{5}$
- Moment d'ordre 2 : $E(Y^2) = \alpha (S(r_1) + S(r_2)) = \frac{36}{5}$
- Variance (Koenig-Huygens) : $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{36}{5} - \frac{64}{25} = \frac{116}{5}$

Exercice 4

n souris ($n \geq 3$) sont libérées dans un enclos et se répartissent aléatoirement et indépendamment dans trois cages A_1, A_2, A_3 .

On note X_i le nombre de souris ayant choisi la cage A_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Déterminer la loi de X_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$
2. Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? en déduire que les variables X_1, X_2, X_3 ne sont pas indépendantes.
3. Déterminer la probabilité que toutes les souris choisissent la même cage.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins une cage reste vide.
5. Déterminer la probabilité que les trois cages soient occupées.

Exercice 5 On considère une pièce donnant PILE avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$
On lance indéfiniment la pièce et on note :

- X le rang d'apparition du premier PILE,
 - Y le rang d'apparition du deuxième PILE.
1. Rappeler la loi de X et déterminer $Y(\Omega)$
 2. Pour deux entiers naturels non nuls i et j , calculer $\mathbf{P}_{[X=i]}(Y = j)$ en distinguant les cas $i < j$ et $i \geq j$
 3. A l'aide d'un système complet d'événements, en déduire que

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq 2, P(Y = j) = (j-1)p^2q^{j-2}$$
 4. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 6

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $\frac{1}{3}$

Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $p \in]0, 1[$

Les joueurs A et B lancent leur pièce de manière indépendante jusqu'à obtenir PILE.

- Si les deux joueurs ont le même nombre de lancers, personne ne gagne.
- Sinon, celui qui a fait le plus de lancers doit à son adversaire 1€ pour chaque lancer supplémentaire.

Par exemple, si A obtient PILE au 7^{ème} lancer, B obtient pile au 11^{ème} lancer, alors B doit payer à A la somme de 4 €.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers effectués par le joueur A pour obtenir PILE, et Y le nombres de lancers effectués par le joueur B pour obtenir PILE.

On note enfin $Z = Y - X$

1. Justifier que les variables X et Y suivent des lois géométriques dont on donnera le paramètre.
Préciser les ensembles $X(\Omega), Y(\Omega)$ des issues possibles, et les valeurs de $P(X = k), P(Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
Donner les espérances $E(X), E(Y)$ de X et Y , et leurs variances $V(X)$ et $V(Y)$
2. a. Montrer que $E(Z) = \frac{1-3p}{p}$, et $V(Z) = \frac{6p^2 - p + 1}{p^2}$

b. Montrer que : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \frac{p}{1+2p}$

En déduire la valeur de $P(Z = 0)$

On pourra d'abord justifier : $[Z = 0] = ([X = 1] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 2]) \cup \dots$

Exercice 7

Une urne contient initialement 1 boule blanche et 1 boule noire. On effectue une suite de tirages dans l'urne ; après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute une boule de la couleur opposée à celle qui vient d'être obtenue (donc une noire si une boule blanche est tirée et inversement).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules blanches juste avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, et on note $X_0 = 1$

On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$: B_k l'événement : « la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » et $N_k = \overline{B_k}$

1. Déterminer la loi de X_1

$$X_1(\Omega) = \{1, 2\}$$

$$[X_1 = 1] = N_1 \text{ donc } P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \text{ donc } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)$$

2. Déterminer la loi de X_2

$$X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$$

Option A : (petite) formule des probabilités totales d'après 1., $[X_1 = 2] = \overline{[X_1 = 1]}$
donc $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, P(X_2 = i) = P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = i) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_2 = i)$

en particulier $P(X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{6}$
car si $X_1 = 1$ il y a alors une chance sur trois de tirer une boule blanche au deuxième tirage (et donc d'avoir $X_2 = 1$) et car il est impossible de passer de deux boules blanches à une boule blanche ($P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) = 0$)

de même $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ et $P(X_2 = 2) = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Option B : $[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$ donc $P(X_2 = 1) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

De même $[X_2 = 3] = N_1 \cap N_2$ donc $P(X_2 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

et on en déduit : $P(X_2 = 2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Loi de X_2 :

k	1	2	3
$P(X_2 = k)$	1/6	2/3	1/6

3. Préciser $X_n(\Omega)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_n(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in X_{n+1}(\Omega)$:

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{k}{n+2}P(X_n = k) + \frac{3+n-k}{n+2}P(X_n = k-1)$$

$\{[X_n = i], i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket\}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, pour $k \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ fixé : $P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k)$

Mais $P(X_n = i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) = 0$ pour $i \notin \{k, k-1\}$ car $[X_{n+1} = k]$ ne peut se réaliser que si

$X_n = k$ ou $X_n = k - 1$

Donc (on ne garde dans la somme que les termes pour $i = k$ et $i = k - 1$) :

$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k - 1)P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k)$ Enfin :

- $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = P_{X_n=k}(B_{n+1})$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant k boules blanches et $2 + n$ boules en tout (avec équiprobabilité),

$$\text{donc } P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \frac{k}{n+2}$$

- $P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = P_{X_n=k-1}(B_{n+1})$ est la probabilité de tirer une boule noire dans une urne contenant $2 + n$ boules en tout dont $n + 2 - (k - 1) = n + 3 - k$ boules noires,

$$\text{donc } P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = \frac{n+3-k}{n+2}$$

$$\text{Conclusion : } P(X_{n+1} = k) = \frac{k}{n+2}P(X_n = k) + \frac{3+n-k}{n+2}P(X_n = k-1)$$

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{(n+1)!}$

Option A : par récurrence comme vu en classe

Option B : $[X_n = 1] = B_1 \cap \dots \cap B_n = \cap_{k=1}^n B_k$,

donc $P(X_n = 1) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$ d'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{2+(n-1)} = \prod_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1} k} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

6. a. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Question difficile

$$E(X_{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}E(X_n) + 1$$

On commence par écrire $E(X_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+2} kP(X_{n+1} = k)$ puis on utilise la formule de la question 4. :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+2} \left(\frac{k^2}{n+2}P(X_n = k) + \frac{k(3+n-k)}{n+2}P(X_n = k-1) \right) \\ &= \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=1}^{n+2} k^2 P(X_n = k) + \sum_{k=1}^{n+2} k(n+3-k)P(X_n = k-1) \right) \end{aligned}$$

Par le changement d'indices $j = k - 1$ dans la deuxième somme :

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=1}^{n+2} k^2 P(X_n = k) + \sum_{j=0}^{n+1} (j+1)(n+2-j)P(X_n = j) \right)$$

On remarque que $P(X_n = n+2) = 0$ dans la première somme et $P(X_n = 0) = 0$ dans la deuxième somme :

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_n = k) + \sum_{j=1}^{n+1} (j+1)(n+2-j)P(X_n = j) \right)$$

On applique le théorème de transfert (avec $f(x) = (x+1)(n+2-x)$)

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \frac{1}{n+2} (E(X_n^2) - E[(X_n+1)(n+2-X_n)]) \\ &= \frac{1}{n+2} (E(X_n^2) - E(X_n^2 + (n+1)X_n + (n+2))) \end{aligned}$$

On utilise la linéarité de l'espérance :

$$= \frac{1}{n+2} ((n+1)E(X_n) + (n+2)) \text{ et donc : } E(X_{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}E(X_n) + 1$$

- b. Soit $a_n = (n+1)E(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Calculer $a_{n+1} - a_n$ et en déduire a_n , puis $E(X_n)$ en fonction de n

En multipliant la relation précédente par $n+2 : \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} - a_n = n+2$

On en déduit, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+2) = \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n+4)$$

Comme $\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - a_k = a_n - a_1$ par télescopage, on en déduit : $a_n = a_1 + \frac{1}{2}(n-1)(n+4)$

$$a_1 = 2E(X_1) = 3 \text{ donc } E(X_n) = \frac{1}{n+1} \left(3 + \frac{1}{2}(n-1)(n+4) \right)$$

On pourra vérifier avec la question 2. la formule pour $n=2$ qui donne $E(X_2) = 2$

Loi d'une somme, indépendance, opérations

Exercice 14 - loi d'un maximum/minimum

Soit U, V deux variables aléatoires réelles indépendantes, $X = \min(U, V)$ et $Y = \max(U, V)$

Que ce soit pour la question 1. (loi uniforme) ou pour la question 2. (loi géométrique), les lois de X et Y se trouvent de la même façon (on ne respecte pas l'ordre des questions ici, cette partie du corrigé est donc commune) :

- Pour la loi d'un min (loi de $X = \min(U, V)$).

- * Déterminer $X(\Omega)$

- * Pour $k \in X(\Omega)$ écrire : $[X > k] = [U > k] \cap [V > k]$

- * Comme U et V sont indépendantes : $P(X > k) = P(U > k)P(V > k)$, et comme U et V sont de même loi : $P(U > k) = P(V > k)$, donc : $P(X > k) = (P(U > k))^2$

- * Calculer $P(U > k)$ et en déduire l'expression de $P(X > k)$

- * Calculer $P(X = k)$ avec la formule (qu'il faut savoir justifier, voir cours) :

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$$

- Pour la loi d'un max (loi de $Y = \max(U, V)$)

- * Déterminer $Y(\Omega)$

- * Pour $k \in Y(\Omega)$ écrire : $[Y \leq k] = [U \leq k] \cap [V \leq k]$

- * Comme U et V sont indépendantes : $P(Y \leq k) = P(U \leq k)P(V \leq k)$, et comme U et V sont de même loi : $P(U \leq k) = P(V \leq k)$, donc : $P(Y \leq k) = (P(U \leq k))^2$

- * Calculer $P(U \leq k)$ et en déduire l'expression de $P(Y \leq k)$

- * Calculer $P(Y = k)$ avec la formule (qu'il faut savoir justifier, voir cours) :

$$P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1)$$

1. On suppose dans cette question que U et V suivent la même loi uniforme $\mathcal{U}([1, n])$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- a. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$

- b. Calculer $P(X > k)$ et $P(Y \leq k)$ pour $k \in X(\Omega)$

- c. Justifier que, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) \text{ et en déduire la loi de } X$$

- d. En vous inspirant de la question précédente, déterminer la loi de Y

Cas de la loi uniforme $\mathcal{U}([1, n])$

- Loi de $X = \min(U, V)$

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(U > k) = P([U = k+1] \cup \dots \cup [U = n]) = \frac{n-k}{n}$ (car loi uniforme)

Donc : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X > k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2$

Enfin, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (N.B. : la formule précédente est également valable pour $k = 0$) :

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \frac{2n-2k+1}{n^2}$$

- Loi de $Y = \max(U, V)$

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(U \leq k) = P([U = 1] \cup \dots \cup [U = k]) = \frac{k}{n}$

Donc : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Y \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$

Enfin, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (de même la formule précédente est en fait valable également pour $k = 0$) :

$$P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{2k-1}{n^2}$$

2. On suppose dans cette question que U et V suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$ fixé.

a. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$

b. Calculer $P(X > k)$ et $P(Y \leq k)$ pour $k \in X(\Omega)$

c. En déduire la loi de X et celle de Y . On vérifiera que X suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$, où $q = 1 - p$

Cas de la loi géométrique.

- Loi de $X = \min(U, V)$

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(U > k) = P\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [U = i]\right) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(U = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^k \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = pq^k \times \frac{1}{1-q}$$

donc $P(U > k) = q^k$

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X > k) = P(U > k)P(V > k) = q^k \times q^k = q^{2k}$

Enfin, pour $k \in \mathbb{N}^*$ (même remarque que pour la loi uniforme) :

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = (1-q^2)(q^2)^{k-1}$$

et donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^2)$

- Loi de $Y = \max(U, V)$

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(U \leq k) = 1 - P(U > k) = 1 - q^k$ donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y > k) = (1 - q^k)^2$

Enfin, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$

Exercice 15 - loi d'une somme, espérance

Une urne contient des boules blanches en proportion b et rouges, en proportion r ; on a donc $b + r = 1$

On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si une boule blanche est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage, et 0 si une boule rouge est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage.

On note enfin $S_k = Z_1 + \dots + Z_k$

1. Déterminer la loi de probabilité de S_k pour $k \in \mathbb{N}^*$

Calculer son espérance et sa variance.

2. Pour tout réel $t > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$g_k(t) = E(t^{S_k}) = \sum_{j=0}^{+\infty} t^j P(S_k = j)$$

Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k

3. Montrer que $g'_k(1) = E(S_k)$ et retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 16 - espérance, séries à termes positifs*difficile*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

L'objectif de cet exercice est de montrer le résultat (R) suivant :

X admet une espérance si, et seulement si $\sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ converge, et dans ce cas : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$

1. a. Montrer que, pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\sum_{k=1}^N P(X \geq k) - \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) = N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k) = NP(X \geq N)$$

On va montrer ce résultat par récurrence, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

on pose $P(N) : \sum_{k=1}^N P(X \geq k) - \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) = N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k)$

Initialisation : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^1 P(X \geq k) - \sum_{k=0}^{1-1} kP(X = k) = 1 \times \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \Leftrightarrow P(X \geq 1) - 0 = P(X \geq 1)$

ce qui est vrai donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $N \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(N)$ vraie

par relation de Chasles, $\sum_{k=1}^{N+1} P(X \geq k) - \sum_{k=0}^N kP(X = k) = \sum_{k=1}^N P(X \geq k) + P(X \geq N+1) -$

$$\sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) - NP(X = N)$$

or par hypothèse $\sum_{k=1}^N P(X \geq k) - \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) = N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k)$

donc $\sum_{k=1}^{N+1} P(X \geq k) - \sum_{k=0}^N kP(X = k) = N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k) + P(X \geq N+1) - NP(X = N)$

or $\sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k) = P(X = N) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} P(X = k)$ et $P(X \geq N+1) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} P(X = k)$

donc $\sum_{k=1}^{N+1} P(X \geq k) - \sum_{k=0}^N kP(X = k) = N \left(P(X = N) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} P(X = k) \right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} P(X = k) - NP(X = N)$

$$\begin{aligned}
&= NP(X = N) + N \sum_{k=N+1}^{+\infty} P(X = k) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} P(X = k) - NP(X = N) \\
&= (N+1) \sum_{k=N+1}^{+\infty} P(X = k) \text{ i.e. } P(N+1) \text{ est vraie, d'où l'hérédité}
\end{aligned}$$

donc par théorème de récurrence, $\forall N \in \mathbb{N}^*, P(N)$ est vraie

Pour la deuxième égalité $[X \geq N] = \cup_{k=N}^{+\infty} [X = k]$ donc par incompatibilité des $[X = k]_{k \in \mathbb{N}^*}$

$$P(X \geq N) = \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k) \text{ d'où } NP(X \geq N) = N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k)$$

b. On suppose dans cette question que X admet une espérance.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité : $\sum_{k=N}^{+\infty} kP(X = k) \geq NP(X \geq N)$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, si X admet une espérance alors $\sum_{k \geq 0} kP(X = k)$ converge (absolument) et de fait

$\sum_{k \geq N} kP(X = k)$ converge

or $\forall p \geq N, \quad k \geq N \Rightarrow kP(X = k) \geq NP(X = k)$ et donc $\sum_{k=N}^p kP(X = k) \geq \sum_{k=N}^p NP(X = k)$

i.e. $\sum_{k=N}^p kP(X = k) \geq N \sum_{k=N}^p P(X = k)$

et comme vu à la question 1. $\sum_{k \geq N} P(X = k)$ converge et $\sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k) = P(X \geq N)$

donc par passage à la limite (quand p tend vers $+\infty$) dans l'inégalité

$$\sum_{k=N}^{+\infty} kP(X = k) \geq N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k) \text{ i.e. } \sum_{k=N}^{+\infty} kP(X = k) \geq NP(X \geq N)$$

c. En déduire que $NP(X \geq N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, puis que $\sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ converge et que :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$$

L'énoncé a omis de le préciser, mais on poursuit le cas où X admet une espérance comme X admet une espérance, par définition,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) + \sum_{k=N}^{+\infty} kP(X = k)$$

donc $\sum_{k=N}^{+\infty} kP(X = k) = E(X) - \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k)$

or $\sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k)$ converge (quand N tend vers $+\infty$) et $\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = E(X)$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=N}^{+\infty} kP(X = k) = 0$

donc d'après l'inégalité démontrée à la question précédente et le théorème des gendarmes (sachant que $\forall N \in \mathbb{N}^*, NP(X \geq N) \geq 0$), on trouve $\lim_{N \rightarrow +\infty} NP(X \geq N) = 0$

alors d'après la question 1.a. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^N P(X \geq k) - \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) \right) = 0$

or par hypothèse ici, X admet une espérance, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) = E(X)$

et donc $\sum_{k=1}^N P(X \geq k)$ converge (quand N tend vers $+\infty$) et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = E(X)$

d. Réciproquement, on suppose que $\sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ converge.

Montrer, à l'aide de la question 1.a. que la somme partielle de la série $\sum_{k \geq 0} kP(X = k)$ est majorée, et en déduire que X admet une espérance.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, par hypothèse, $\sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ converge or il s'agit d'une série à termes positifs, donc

$$\sum_{k=1}^N P(X \geq k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$$

$$\text{or d'après 1.a., } \sum_{k=1}^N P(X \geq k) - \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) = N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k)$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) = \sum_{k=1}^N P(X \geq k) - N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k) \text{ donc } \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) \leq \sum_{k=1}^N P(X \geq k)$$

$$\text{car } N \sum_{k=N}^{+\infty} P(X = k) \geq 0$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{N-1} kP(X = k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$$

donc $\sum_{k \geq 0} kP(X = k)$ est une série majorée, de plus à termes positifs, donc elle converge (théorème de la limite monotone)

i.e. X admet une espérance

e. Conclure sur le résultat (R).

Finalement, on a montré (question 1.b. puis 1.c. que X admet une espérance $\Rightarrow \sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$

converge

puis (question 1.b. puis 1.c.) que $\sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ converge $\Rightarrow X$ admet une espérance

d'où l'équivalence entre ces deux résultats, de plus (question 1.c.) on a alors $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$

2. Application.

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X \leq Y$

Montrer que si Y admet une espérance, alors X admet aussi une espérance et $E(X) \leq E(Y)$

Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc d'après le résultat (R) si Y admet une espérance, alors $\sum_{k \geq 1} P(Y \geq k)$

converge

or $Y \geq X$ donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $X \geq k \Rightarrow Y \geq k$ donc $P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$

or $\sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ est une série à termes positifs ainsi que $\sum_{k \geq 1} P(Y \geq k)$, qui converge, donc d'après le

théorème de comparaison sur les séries, $\sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ converge

donc d'après le résultat (R) (utilisé dans l'autre sens), X admet une espérance.

Couples, covariance

Exercice 17 - loi d'un couple, loi marginale

La loi conjointe de (X, Y) est donnée par le tableau :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

- Déterminer les lois marginales.

$X \backslash Y$	0	1	2	Loi (marginale) de X
0	0 1/20	0 1/4	0 0	3/10
1	0 17/60	1 1/4	2 1/6	7/10
Loi (marginale) de Y	1/3	1/2	1/6	1

- Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ et $\text{Cov}(X, Y)$

$$E(X) = \frac{7}{10}, E(Y) = \frac{5}{6}$$

Pour $E(XY)$, le théorème de transfert donne $E(XY) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 2}} ijP([X = i] \cap [Y = j])$

Dans le tableau, cela correspond à la somme des valeurs en rouge multipliées par les probabilités dans chaque case.

On obtient donc : $E(XY) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$ Puis $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

- X et Y sont-elles indépendantes ?

Finalement bien que $\text{Cov}(X, Y) = 0$,

X, Y sont dépendantes, car, $P([X = 0] \cap [Y = 2]) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 2)$

Remarque : on comprend à travers cet exemple que quand un 0 est présent dans un tableau de loi de couple, les variables sont dépendantes.

Exercice 19 - tirages sans remise

Une urne contient r boules rouges et b boules blanches, toutes indiscernables, et on pose $n = b + r$

On effectue successivement n tirages sans remise. On note :

- X_i le rang d'apparition de la $i^{\text{ème}}$ boule rouge tirée ($1 \leq i \leq r$),
- Z_k le nombre de boules rouges obtenues sur les k premiers tirages,
- T_k la variable aléatoire valant 1 si une boule rouge est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.

On posera $Z_0 = 0$

- Dans cette question, on suppose que $r = 1$, $b \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer la loi de X_1 . Calculer son espérance et sa variance.
- Dans cette question, on suppose que $r = 2$ et $n = 5$
 - Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2) . On présentera cette loi par un tableau à double entrée.
 - En déduire les lois de X_1 et de X_2
 - Déterminer la covariance de (X_1, X_2)
- Généralisation : on suppose $r \geq 2$ et $b \geq 2$ quelconques.

difficile

- a. Déterminer $X_j(\Omega)$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$
- b. Justifier la relation $[X_j = k] = [Z_{k-1} = j - 1] \cap [T_k = 1]$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$ et $k \in X_j(\Omega)$
- c. En déduire la loi de X_j pour $j \in \{1, \dots, r\}$

Exercice 20 Couple-somme de variables aléatoires

Plutôt théorique

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p , avec $0 < p < 1$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \dots + Y_n$

1. Déterminer $E(Y_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ puis calculer $E(U_n)$
2. Les variables Y_i ($i \in \mathbb{N}^*$), sont-elles deux à deux indépendantes ?
3. Calculer $E(Y_n Y_{n+1})$ et en déduire la covariance $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$
4. Montrer que $\text{Cov}(U_n, Y_{n+1}) = \text{Cov}(U_{n-1}, Y_{n+1}) + \text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$, puis que :

$$\text{Cov}(U_n, Y_{n+1}) = \text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$$
5. Déterminer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V(U_{n+1}) = V(U_n) + a_n$
 En déduire la valeur de $V(U_n)$ pour $n \geq 2$ quelconque.
6. Déterminer la loi de Y_n

Exercice 21 - loi de Poisson

difficile

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$. On suppose que :

- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètres n et p
 1. Déterminer la loi du couple (X, Y)
 2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp
 3. Déterminer la loi de $X - Y$
 4.
 - a. Etablir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$
 - b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y

Sujets d'annales

Exercice 22 (EML)

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue dans cette urne des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

- B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »
- R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage »

Partie I : simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
import numpy.random as rd
def s(n):
    b=1 # nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r=2 # nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s=0 # nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k in range(1,n+1):
        x=rd.random()
        if ... :
            ...
        else :
            ...
    return
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n=10
m=0
for i in range(1000):
    m=m+s(n)
print(m/1000)
```

On obtient : 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II : rangs d'apparitions de la première boule bleue et de la première boule rouge.

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$
b. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?
2. Déterminer la loi de Z . La variable Z admet-elle une espérance ? une variance ?

Partie III : nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages

On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage, et égale à 0 sinon.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$
2. Déterminer la loi de X_1 , son espérance, sa variance.
3. a. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)
b. En déduire la loi de X_2
c. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$
a. Calculer $P(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n)$

- b. Justifier que : $P(S_n = k) = \binom{n}{k} P(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n)$
 En déduire : $P(S_n = k) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$

5. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \frac{2n}{3}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- a. Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) = \frac{k+2}{n+3}$
 b. En déduire que : $P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n) + 2}{n+3}$
 c. Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1} . Que remarque-t-on ?

Exercice 23 - (Type : Ecricome)

Lorsque A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé, on désignera par $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B , où B est un événement de probabilité non nulle : $P_B(A) = P(A/B)$

Dans cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2

Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents (on peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours des N premiers lancers).

Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement :

Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile

alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} et 8^{ème} lancers).

- Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, \dots, N-1\}$
- Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
 Déterminer la loi de X_3
- Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1) \left(\frac{1}{2}\right)^N$
- Justifier que pour tout entier k de $\{0, \dots, N-1\}$:

$$P_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}$$
 (C'est à dire $P(X_{N+1} = k / X_N = k) = \frac{1}{2}$)
 - En déduire que pour tout entier k de $\{0, \dots, N-1\}$:

$$P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2} P(X_N = k)$$
 - En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}$
 - Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$
 En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N
- Montrer grâce aux résultats 4.b. et 4.c. que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
 - En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $B\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$
 En déduire la variance $V(X_N)$

Exercice 24 - (Edhec)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de

la boule noire.

Pour chaque i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X
2.
 - a. Pour tout i de $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$, justifier que $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$
 - b. Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$
 - c. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
 - a. Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$P([X = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

- b. En déduire $P(Y = 0)$
- c. Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Exercice 25 - (d'après Edhec)

Trois personnes, notées A, B, C veulent simultanément régler leurs courses dans un magasin possédant deux caisses. Les clients A et B occupent simultanément les deux caisses à l'instant 0 et le client C attend que l'une des deux caisses se libère pour prendre la place.

On suppose que les durées de passage à une caisse des trois personnes A, B, C sont mesurées en minutes et sont modélisées par des variables aléatoires X, Y, Z indépendantes et suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On posera $q = 1 - p$

On pose enfin $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$ et on admettra que U et V sont indépendantes de Z

1. Détermination de la loi de U
 - a. Préciser $U(\Omega)$ et $V(\Omega)$
 - b. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = q^k$ et en déduire $P(U > k)$
 - c. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(U = k) = P(U > k - 1) - P(U > k)$
En déduire que U suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. On note T le temps qu'il a fallu au client C pour sortir du magasin, correspondant à la somme du temps d'attente qu'une caisse se libère et du temps de passage en caisse.
 - a. Exprimer T en fonction de U et de Z
 - b. Calculer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable T
3. Simulation informatique sous Python.

- a. Soit deux listes A et B de même longueur n . Compléter les lignes de commandes suivantes renvoyant deux listes m et M vérifiant : $m[i] = \min(A[i], B[i])$ et $M[i] = \max(A[i], B[i])$ pour tout indice i dans $0, \dots, n - 1$:

```
m=[min(A[i], B[i]) ...]  
M=[max(A[i], B[i]) ...]
```

On importe la bibliothèque `numpy.random` par `import numpy.random as rd`.

On rappelle alors que la commande `rd.geometric(p, n)` renvoie n réalisations indépendantes de la loi géométrique de paramètre p

- b. Compléter les commandes suivantes pour qu'elles simulent n réalisations des variables U, V, T , pour n et p entrés par l'utilisateur.

```
import numpy.random as rd  
n=int(input('entrer la valeur de n : '))  
p=input('entrer la valeur de p : ')  
x=rd.geometric(p, n)  
y=rd.geometric(p, n)  
z=rd.geometric(p, n)  
u=-----  
v=-----  
t=-----
```

4. Calcul approché de $h = P(T \geq V)$
 - a. Que représente l'événement $[T \geq V]$?
 - b. Compléter le programme précédent pour qu'il permette de calculer une valeur approchée de $h = P(T \geq V)$ par simulation.
5. Calcul exact de h

Dans cette question, on pose $\Delta = V - U$

- a. Préciser $\Delta(\Omega)$
- b. Justifier que : $[\Delta = 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = k] \cap [Y = k]$, puis montrer que $P(\Delta = 0) = \frac{p}{1+q}$
- c. Montrer que, pour $j \geq 1$: $P(\Delta = j) = \frac{2pq^j}{1+q}$
- d. Montrer que $[T \geq V] = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [Z \geq k] \cap [\Delta = k]$ puis que : $P(T \geq V) = \frac{2-p^2}{(2-p)^2}$