Matrices, matrices diagonalisables et algorithme du pivot de Gauss

Code de partage avec Capytale : 0ac6-7821270

On utilisera les bibliothèques suivantes :
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
```

Exercice 1 - opérations usuelles sur les matrices

On pose :
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Définir A avec Python.
2. Avec Python, calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3 = 4A^2 - A - 6I_3$
3. Déterminer A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2. Vérifier le résultat avec Python.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Montrer que P est inversible et avec Python calculer $P^{-1}AP$

   Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

On considère le graphe G de sommets $(0, 1, 2, 3, 4)$ et de liste d'adjacence :

$$L = [[1, 2, 4], [0, 2, 3, 4], [0, 1, 3, 4], [1, 2], [0, 1, 2]]$$

1. Ecrire un programme qui permet de remplir la matrice d'adjacence A à partir de `L`. Justifier que A est diagonalisable.
2. Soit $D = \mathrm{diag}(d_0, \dots d_4)$ la matrice diagonale où l'élément d_i en ligne i et colonne i vaut le degré de i dans le graphe G

   Ecrire un programme qui permet de remplir la matrice D
3. Soit $M = D - A$
   (a) Justifier que M est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de M
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de M

Exercice 3 - algorithme du pivot de Gauss

1. Opération $L_i \leftrightarrow L_j$
   Ecrire une fonction `Echange(A, i, j)` renvoyant la matrice A avec les lignes i et j échangées.
2. Opération $L_i \leftarrow L_i + aL_j$
   Ecrire une fonction `Elimine(A, i, j, a)` renvoyant la matrice A après l'opération $L_i \leftarrow L_i + aL_j$
3. Opération $L_i \leftarrow aL_i$
   Ecrire une fonction `mult(A, i, a)` renvoyant la matrice A après l'opération $L_i \leftarrow aL_i$
4. Utiliser pas-à-pas les fonctions précédentes pour inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

   On utilisera les opérations sur les lignes avec la matrice suivante :
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   On placera l'inverse de A dans une matrice `B` et on vérifiera le résultat.