

Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :

- étudier la convergence d'une intégrale sur un intervalle quelconque ☐
- calculer la valeur d'une intégrale généralisée ☐
- utiliser les intégrales de Riemann ☐
- utiliser les théorèmes de comparaison pour déterminer la convergence d'une intégrale généralisée ☐
- utiliser la convergence absolue d'une intégrale généralisée ☐
- dans certains cas (intégration par parties par exemple), se ramener à une intégrale sur un segment pour le calcul d'intégrale généralisée ☐

L'objectif du chapitre est de donner un sens à et d'utiliser $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, $\int_{-\infty}^b f(t)dt$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

1 Définitions des intégrales généralisées

<u>Définition</u> : si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$), et si $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, alors on écrit : $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ et on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. On parle alors d'intégrale généralisée (ou impropre). Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.	<u>Exemples</u> : • $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge car pour $x \geq 1$, $\int_1^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_1^x$ soit $\int_1^x e^{-t}dt = e^{-1} - e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ • $\int_0^{+\infty} tdt$ diverge car $\int_0^x tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x tdt = +\infty$
de même, si $\int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow -\infty$, on définit : $\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$	<u>Remarque</u> : une intégrale généralisée en $-\infty$ peut se ramener à une intégrale en $+\infty$ car $\int_a^x f(t)dt = \int_{-x}^{-a} f(-u)du \text{ (avec } u = -t)$ et donc $\int_{-\infty}^b f(t)dt = \int_{-\infty}^{-a} f(-u)du$ si convergence
enfin, si $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ convergent, alors on définit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$	<u>Exemple</u> : on peut démontrer que $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ convergent}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge

Remarque : on s'autorisera (pour les variables aléatoires à densités) à calculer des intégrales de fonctions « presque » continues (qui ont un nombre fini de points de discontinuité) : si f n'est pas continue en $c \in]a, b[$ (a et b pouvant être des réels ou $-\infty$ et $+\infty$) mais admet des limites finies à droite et à gauche en c , on écrira : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (si convergence le cas échéant)

Par exemple, si $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$

2 Propriétés des intégrales convergentes

<u>Propriété - linéarité de l'intégrale :</u> si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))dt$ converge et $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^{+\infty} f + \mu \int_a^{+\infty} g$	<u>Exemple :</u> nous avons vu plus haut que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ convergent donc $\int_0^{+\infty} \left(25e^{-t} - 15 \ln(3) \frac{1}{1+t^2} \right) dt$ converge
<u>Propriété - croissance de l'intégrale :</u> si $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq g(t)$ et si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$ <u>cas particulier - positivité de l'intégrale</u> si $\forall t \in [a, +\infty[, 0 \leq f(t)$ et si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $0 \leq \int_a^{+\infty} f(t)dt$	<u>Exemples :</u> $\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et les intégrales sont convergentes (par comparaison pour e^{-t^2}) donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ $\forall t \geq 0, e^{-t} \geq 0$ et l'intégrale converge donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt \geq 0$
<u>Propriété - relation de Chasles :</u> $\forall a, c \in \mathcal{D}_f$ $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow \int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge et dans ce cas $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$	<u>Remarque :</u> cela découle immédiatement de la relation de Chasles sur un segment. <u>Exemple d'utilisation :</u> pour démontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$, 1) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ est définie 2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge (car $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ donc par théorème de comparaison) donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$
<u>Propriété - changement de variable affine :</u> si convergence de l'une des deux intégrales $\alpha \int_a^{+\infty} f(\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha a + \beta}^{+\infty} f(u)du$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ c'est le changement de variable $u = \alpha t + \beta$	<u>Exemple :</u> $\int_a^{+\infty} e^{-u}du$ converge pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc $\int_c^{+\infty} e^{-(3t+7)}dt$ converge pour tout $c \in \mathbb{R}$

Remarque : toutes ces propriétés sont valables dans les cas $\int_{-\infty}^b$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}$

3 Intégrales de référence

<u>Propriété</u> : Pour $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$ En particulier : $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$	<u>Démonstration</u> : pour $x \geq 0$ $\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^x = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} = 0$ d'où le résultat
<u>Définition - intégrales de Riemann</u> : pour $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est appelée intégrale de Riemann	<u>Exemples</u> : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ sont des intégrales de Riemann $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} dt$, $\int_{-5}^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln(t)} dt$ ne sont pas des intégrales de Riemann
<u>Propriété - critère de convergence des intégrales de Riemann</u> : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ et dans ce cas : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$ plus généralement, pour $r > 0$: $\int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ et dans ce cas : $\int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{r^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$	<u>Démonstration</u> : pour $x \geq 1$ (et $\alpha \neq 1$) $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^x t^{-\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha + 1} t^{-\alpha+1} \right]_1^x$ $= \frac{1}{\alpha - 1} (1 - x^{-\alpha+1})$ et $x^{-\alpha+1} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$ si $\alpha > 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha+1} = +\infty$ si $\alpha < 1$ d'où le résultat <u>Remarque</u> : le lien avec les séries de Riemann n'est pas que fortuit, nous le verrons en exercice.

Remarque : ces intégrales de référence (Riemann ou exponentielle) serviront souvent de « référence » pour les théorèmes de comparaison.

4 Convergence des intégrales de fonctions positives

4.1 Convergence de l'intégrale d'une fonction positive

<u>Propriété</u> : soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction F est majorée où $F : x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$	<u>Remarque</u> : il s'agit d'un théorème de la limite monotone puisque F est une primitive de f, donc F croissante car f est positive.
--	--

4.2 Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives

Tous ces résultats restent vrais si **une** des deux fonctions est positive au voisinage de $+\infty$ (par relation de Chasles).

Et ces résultats s'étendent naturellement aux intégrales sur $] -\infty, b]$ (même si nous ne disposons pas directement des fonctions de référence).

<u>Propriété</u> : soit f et g deux fonctions telles que $\forall x \geq a, 0 \leq f(x) \leq g(x)$ 1) si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge et : $0 \leq \int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g$ 2) si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge	<u>Remarque</u> : ce résultat s'étend aussi à $]-\infty, +\infty[$ <u>Exemple</u> : nous avons vu que $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge or $\forall t \geq 1, t \leq t^2$ donc $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$ donc par comparaison $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge 2) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1} dt$ diverge car $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{t-1}$
<u>Propriété - usage de la négligeabilité</u> : soit f et g deux fonctions positives avec a, b des réels telles que $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$ 1) si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge 2) si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge	<u>Exemples</u> : $\frac{1}{t^2 \ln(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln(t)} dt$ converge $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt$ diverge car $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)$
<u>Propriété - usage d'équivalents</u> : soit f et g deux fonctions positives et a, b des réels si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$ alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_b^{+\infty} g$ sont de même nature.	<u>Exemples</u> : $\frac{1}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge $\frac{1}{1+t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$ diverge

5 Convergence absolue d'une intégrale

<u>Définition</u> : avec $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ on dit que $\int_a^b f$ converge absolument si et seulement si $\int_a^b f$ converge.	<u>Exemple</u> : $\int_1^{+\infty} \frac{-1}{t^2} dt$ converge absolument car $\left \frac{-1}{t^2} \right = \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge
<u>Propriété</u> : si $\int_a^b f$ converge absolument, alors $\int_a^b f$ converge et : $\left \int_a^b f \right \leq \int_a^b f $	<u>Remarque</u> : cette propriété pourra être utilisée pour se ramener à des fonctions positives à des fins de comparaison.

Intégration par parties et changement de variables

A l'exception du changement de variable affine mentionné plus haut, ces opérations se feront uniquement sur un segment, avant de passer à la limite si on veut étudier une intégrale généralisée.