

Calculs divers**Exercice 1**

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x)^2} dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^3} dx$$

$$4. \int_0^x te^{-t^2} dt$$

$$5. \int_1^2 \frac{1+x^3+x^4}{x^2} dx$$

$$6. \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$$

Exercice 2

Dans chaque cas, calculer des primitives de la fonction f en précisant l'intervalle de validité.

$$1. f(x) = \sqrt{2-x}$$

$$2. f(x) = x \ln(1+x^2)$$

$$3. f(x) = xe^{-2x+1}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{a+x} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$5. f(x) = \ln(x)$$

$$6. f(x) = x \ln(x)$$

Exercice 3

Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, en précisant les intervalles de validité.

Montrer la convergence et calculer l'intégrale : $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

Exercice 4

Etudier les convergences des intégrales suivantes, et les calculer si possible.

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

$$2. \text{ Pour } n \geq 2, \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$$

$$3. \int_0^{+\infty} te^{-2t} dt$$

$$4. \int_e^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

Exercice 5

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

Exercice 6 - changements de variables

$$1. \text{ Calculer } \int_0^1 t \ln(1+t^2) dt \text{ par le changement de variables } u = 1+t^2$$

$$2. \text{ Calculer } I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^{n+1}} dx \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ par le changement de variables } u = x^{n+1}$$

Exercice 7 - convergence d'intégrale

Etudier la convergence des intégrales suivantes (on ne demande pas de les calculer).

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$2. \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{1+t^4}} dt$$

$$3. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$4. \int_0^{+\infty} te^{-t} \ln(t) dt$$

Exercice 8 - lien séries et intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$1. \text{ Montrer que } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

2. A l'aide des intégrales de Riemann, retrouver les résultats sur la convergence des séries de Riemann

Suites et fonctions définies à l'aide d'une intégrale

Exercice 9

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$

1. Justifier que f est une fonction paire.
2. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale convergente, et calculer sa valeur. On pourra calculer séparément $\int_0^{+\infty} f$ et $\int_{-\infty}^0 f$
3. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
 - a. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $F' = f$
 - b. Montrer que F est strictement croissante. Préciser les limites de F en $+\infty$ et en $-\infty$
 - c. Montrer que : $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 10

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+t^2}dt$

1. En utilisant le changement de variables $s = -t$, montrer que f est impaire.
2.
 - a. Justifier que $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$. On note G une primitive, on ne demande pas d'explicitier $G(x)$
 - b. Exprimer $f(x)$ à l'aide de G et de x
 - c. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$
 - d. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$
 - e. Montrer que : $\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$
En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$$

1. Etude de f_n
 - a. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour $x \in [n, +\infty[$
Donner le sens de variation de f_n
 - b. En minorant $f_n(x)$, établir que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$
 - c. En déduire que, pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 1$
2. Etude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 - a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
 - b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$
 - c. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et que $\sum_{n \geq 0} (u_n - n)$ est une série convergente.

Exercice 12 - un peu plus difficile

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ et $u_n = \sqrt{n}I_n$

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente.
Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et étudier sa convergence.
3. Calculer I_n , pour tout $n \geq 1$ (on admet que $I_1 = \pi$)
4.
 - a. Montrer que, pour tout réel x : $\ln(1+x^2) \leq x^2$
En déduire que pour tout $n \geq 1$: $I_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx$
 - b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$
 - c. En déduire une minoration de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$
5. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\binom{2n}{n} \sim \frac{\alpha 4^n}{\sqrt{n}}$