

Sujet d'entraînement n°2

Soit n un entier naturel non nul, $n \geq 2$.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus.

Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur ; sinon, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu ; sinon, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur mais ne remporte rien.

On suppose que la pièce est truquée ; on note p la probabilité d'obtenir Pile, et celle d'obtenir Face vaut alors $1 - p$.

On suppose aussi que les lancers sont indépendants.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on note A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Toutes les variables sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Partie 1

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = 2/3$.

- 1) Reconnaître la loi de X , puis vérifier que : $P(A) = \frac{13}{27}$
- 2) Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$ puis expliciter la loi de G
- 3) Calculer l'espérance de la variable aléatoire G . Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie 2

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan : « à ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$. Autrement dit : $Y = 1$ lorsque X prend une valeur paire, et $Y = -1$ sinon.

- 1) a) On note $Z = \frac{1+Y}{2}$. Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$
b) Montrer que : $E(Y) = 2P(A) - 1$
- 2) a) Donner la loi de X
b) En déduire que :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{puis que : } E(Y) = (1-2p)^n$$

- 3) Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et de p
- 4) Démontrer que :

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \ll n \text{ est pair} \gg \right]$$

Partie 3

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $P(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit : que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $E(G) \leq 0$).

- 1) Exprimer G en fonction de X et de Y . En déduire que :

$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k P(X = k)$$

2) Démontrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

3) Montrer que : $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$

4) Démontrer alors que :

$$\left(P(A) \geq \frac{1}{2} \quad \text{ET} \quad E(G) \leq 0 \right) \iff p \leq \frac{1}{2}$$

5) a) Etudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = x(1-2x)^{n-1}$$

b) Pour une valeur n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est-à-dire quelle valeur doit-on donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie 4 (uniquement pour les cubes)

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = 1/4$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.

Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i -ème joueur.

On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1) Pour tout entier $i \in \llbracket 1, 200 \rrbracket$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

2) Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i ($i \in \llbracket 1, 200 \rrbracket$)

Démontrer alors que $E(J) = 500$ et que $V(J) = 11250$

3) Justifier que : $P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400)$

4) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $P(J \leq 100) \leq \frac{9}{128}$

5) Compte-tenu de ses exigences de rentabilité et au vu de l'inégalité précédente, le forain peut-il installer son stand ?