Sujet d'entrainement n°2

D'après Ecricome 2022, exercice 3 (sur 3), le plus long **Eléments de corrigé.**

On posera $q = 1 - p$
On pourra remarquer que l'événement A est l'événement « X est pair ».

Partie 1

1) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3, 2/3)$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$1/27$	$6/27$	$12/27$	$8/27$

$A = [X=0] \cup [X=2]$, donc $P(A) = P(X=0) + P(X=2) = \dfrac{13}{27}$

2) Tableau des valeurs de G en fonction de celles de X :

X	0	1	2	3
G	0	-10	20	-30

On en déduit le tableau de la loi de G (celle de X étant connue) :

k	-30	-10	0	20
$P(G=k)$	$8/27$	$6/27$	$1/27$	$12/27$

3) D'après le tableau précédent : $\boxed{E(G) = -60/27 = -20/9}$.

Le jeu est $\boxed{\text{défavorable au joueur.}}$

Partie 2

1) a) $Z = 0$ quand X est impair et $Z = 1$ quand X est pair. Donc Z suit la loi de Bernoulli de paramètre : la probabilité que X soit pair, c'est-à-dire $P(A)$

b) $Y = 1$ quand A se réalise et $Y = -1$ sinon, donc :
$E(Y) = (-1) \times P(\overline{A}) + 1 \times P(A) = 2P(A) - 1$ car $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2) a) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

b) Le théorème de transfert donne :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et, d'après la formule du binôme de Newton :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n = \boxed{(1-2p)^n}$$

3) $\boxed{P(A) = \dfrac{E(Y)+1}{2} = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2}}$

4) $P(A) \geqslant 1/2$ ssi $(1-2p)^n \geqslant 0$
Si $p \leqslant 1/2$, alors $1 - 2p \geqslant 0$ et donc $(1-2p)^n \geqslant 0$
Si $p < 1/2$, alors $1 - 2p < 0$ et $(1-2p)^n \geqslant 0$ si, et seulement si n est pair.
Conclusion : $\boxed{(1-2p)^n \geqslant 0 \text{ si, et seulement si : } p \leqslant 1/2 \text{ OU } n \text{ est pair.}}$

Partie 3

1) $G = 10XY = 10(-1)^X X$. D'après le théorème de transfert :

$$E(G) = \sum_{k=0}^{n} 10(-1)^k k P(X=k) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X=k)$$

2) en bref :
$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

3)
$$\begin{aligned}
E(G) &= 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= 10\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} && \text{car le premier terme est nul}\\
&= 10\sum_{k=1}^{n}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= 10np\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} && \text{en factorisant par } np\\
&= 10np\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1} \binom{n-1}{j}p^{j}(1-p)^{n-1-j} && \text{en posant } j=k-1\\
&= -10np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^{j}(1-p)^{n-1-j}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{E(G) = -10np(-p+1-p)^{n-1} = -10np(1-2p)^{n-1}}$

4) $E(G) \leqslant 0$ si, et seulement si : $(1-2p)^{n-1} \geqslant 0$, donc si, et seulement si : $[p \leqslant 1/2]$ OU $[n$ impair $]$.
Donc, d'après la question 4 de la partie 2 :
• si $p \leqslant 1/2$, on a évidemment $P(A) \geqslant 1/2$ et $E(G) \leqslant 0$
• Réciproquement, si $P(A) \geqslant 1/2$ et $E(G) \leqslant 0$, et si on suppose $p > 1/2$, on devrait avoir n à la fois pair et impair, ce qui n'est pas possible, donc $p \leqslant 1/2$

$\boxed{\text{Conclusion : } P(A) \geqslant 1/2 \text{ et } E(G) \leqslant 0 \text{ équivaut à } p \leqslant 1/2}$

5) a) Pour $x \in [0, 1/2]$, $f'(x) = (1-2x)^{n-1} - 2(n-1)x(1-2x)^{n-2} = (1-2x)^{n-2}(1-2nx)$. D'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{2n}$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	m_n	$\searrow$	0

avec $m_n = f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$

b) La rentabilité est maximale quand $\mathbf{E}(G)$ est minimal,

donc quand $p(1-2p)^{n-1} = f(p)$ est maximal, donc quand $\boxed{p = \frac{1}{2n}}$

Partie 4

1) G_i suit la même loi que G :
$P(X=0) = P(G=0) = 9/16$, $P(X=2) = P(G=20) = 1/16$
et $P(X=1) = P(G=-10) = 6/16$ d'où le tableau de la loi de G :

k	-10	0	20
$P(G=k)$	$6/16$	$9/16$	$1/16$

$$\boxed{E(G) = -40/16 = -5/2,\ E(G^2) = \frac{1000}{16} = \frac{250}{4} \text{ et } V(G) = \frac{225}{4}}$$

2) $J = -\sum_{i=1}^{200} G_i$

$E(J) = -200 \times E(G) = 500$ et $V(J) = \sum_{i=1}^{200} V(G_i)$ (indépendance) et donc

$V(J) = 200 \times \frac{225}{4} = 50 \times 225 = 11250$

3) $[|J-500| \geqslant 400] = [J \leqslant 100] \cup [J \geqslant 900]$ donc $[J \leqslant 100] \subset [|J-500| \geqslant 400]$ et donc $P(J \leqslant 100) \leqslant P(|J-500| \geqslant 400)$

4) Pour une variable aléatoire W admettant un moment d'ordre 2 :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(|W - \mathbf{E}(W)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(W)}{\varepsilon^2}$$
En appliquant cette inégalité à J, avec $\varepsilon = 400$
$$P(|J-500| \geqslant 400) \leqslant \frac{11250}{400^2}$$
Calcul : $\frac{11250}{400^2} = \frac{50 \times 225}{400^2} = \frac{50 \times 9 \times 25}{400 \times 400} = \frac{9}{4 \times 2 \times 4 \times 4} = \frac{9}{128}$

5) De la question précédente, la probabilité que le forain gagne moins de 100 euros est inférieure à $9/128 < 1/10$, donc il peut installer son stand, suivant ses critères.