Dans tout le sujet on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes les variables aléatoires qui interviennent dans la suite sont définies sur cet espace.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et p un réel appartenant à $]0,1[$.

Pour générer des graphes non orientés de manière aléatoire, on se donne :
- $S = [\![0, n-1]\!]$ les sommets du graphe ;
- pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ avec $u < v$, $T_{u,v}$ une variable de Bernoulli de paramètre p. Les variables $T_{u,v}$, pour $\{u, v\}$ décrivant les paires de sommets avec $u < v$, sont supposées indépendantes ;
- les arêtes d'un graphe G ainsi généré sont les paires $\{u, v\}$ telles que $T_{u,v} = 1$ si $u < v$ ou $T_{v,u} = 1$ si $v < u$.

Dans tout le problème, par convention, une somme portant sur un ensemble d'indices vide vaut 0, un produit vaut 1, une intersection vaut Ω, une réunion vaut $\emptyset$.

Partie 1 – Nombre aléatoire de triangles

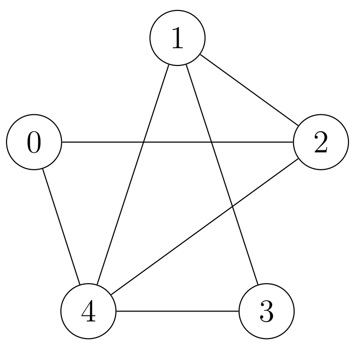
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties $\{u, v, w\}$ à trois éléments de l'ensemble des sommets, r le nombre de ses éléments et on pose

$$\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_r\}$$

Etant donné $t = \{u, v, w\}$, un élément de $\mathcal{T}$, on dit que t est un triangle dans un graphe G généré aléatoirement si $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ et $\{w, u\}$ sont des arêtes de G.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire de Bernoulli associée à l'événement « t_k est un triangle de G » et Z_n la variable aléatoire égale au nombre de triangle de G.

Par exemple si $n = 5$ et le graphe de G est représenté ainsi,



alors $Z_5 = 3$.

1. Quelle est la valeur de r en fonction de n ?

2. a. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Posons $t_k = \{u, v, w\}$ avec $u < v < w$. Montrer que $Y_k = T_{u,v}T_{v,w}T_{u,w}$.

b. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p^3.

c. Justifier que $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} Y_k$. En déduire que $E(Z_n) = \dbinom{n}{3} p^3$.

▶ On s'intéresse à la variance de Z_n.
Si i et j appartiennent à $[\![1,r]\!]$ et sont différents, on note $i \equiv j$ lorsque t_i et t_j ont exactement deux éléments en commun et $i \not\equiv j$ dans le cas contraire.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (i,j) tels que $i \equiv j$, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (i,j) tels que $i \neq j$ et $i \not\equiv j$.
On désigne par a_n le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$.

3. **a.** Montrer que :

$$V(Z_n) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

b. Montrer que si $(i,j) \in \mathcal{F}$, Y_i et Y_j sont indépendantes. En déduire que :

$$V(Z_n) = \sum_{i=1}^{r} V(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

c. En conclure que :

$$V(Z_n) = rp^3(1-p^3) + \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} E(Y_iY_j)\right) - a_n p^6$$

▶ On note $\Delta_n = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} E(Y_iY_j)$.

4. Montrer que si $i \equiv j$, $E(Y_iY_j) = p^5$ et en déduire que $\Delta_n = a_n p^5$.
En conclure que : $V(Z_n) = \binom{n}{3}(p^3 - p^6) + a_n(p^5 - p^6)$.

5. Calcul de a_n.

a. Déterminer le nombre de triplets $(\{u,v\}, w, y)$ où (u,v,w,y) sont quatre éléments distincts de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$.

b. En déduire que $a_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$.

Partie 2 – Nombre aléatoire de triangles

On se donne un graphe G généré par le procédé décrit dans le préambule.

On définit la fonction `supprimeDer(L)` qui, si `L` est la liste des listes d'adjacence du graphe G dont les sommets sont $0, 1, \ldots, n-1$ modifie `L` afin qu'elle devienne la liste des listes d'adjacence du graphe G', dont les sommets sont $0, 1, \ldots, n-2$, obtenu en supprimant dans G le sommet $n-1$ et les arètes contenant ce sommet.

```
def supprimeDer(L):
  s = len(L)-1
  L.pop() # supprime le dernier élément de la liste L
  for a in L:
    if s in a:
      a.remove(s) # supprime s dans la liste a
```

6. Compléter la fonction suivante pour qu'elle retourne le nombre de triangles dont un des sommets est le sommet `s` dans le graphe G dont la liste des listes d'adjacence est `L` :

```python
def triangles2s(s,L):
  cpt = 0
  adj = L[s]
  for i in range(len(adj)):
    for j in range(...,len(adj)):
      if ... in L[...]:
        cpt += 1
  return cpt
```

7. Ecrire une fonction `nbTriangles(L)`, utilisant les deux fonctions précédentes, qui retourne le nombre de triangles du graphe G dont la liste des listes d'adjacence est représentée par `L`.

8. On suppose que la fonction `graphe(n,p)` génère un graphe aléatoire suivant les hypothèses décrites dans le préambule. Expliquer ce que retourne la fonction suivante :

```python
def fonctionMystere(n):
  cpt = 0
  for i in range(1000):
    L = graphe(n,1/n)
    if nbTriangles(L) == 0:
      cpt += 1
  return cpt/1000
```

Partie 3 – Inégalité de Harris

k désigne un entier naturel non nul.

- Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  Si $k \geqslant 2$, on dit que f est k-croissante sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $(x_1, \ldots, x_k)$ élément de $\mathcal{D}$ et $i \in [\![1, k]\!]$, $t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_k)$ est croissante sur son ensemble de définition.
  Si $k = 1$, une fonction 1-croissante sur $\mathcal{D}$ est simplement une fonction croissante sur $\mathcal{D}$.
- On définit de même la notion de fonction k-décroissante.
- On considère $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires finies.
  On admet le résultat suivant (théorème de transfert d'ordre k) :
  Si f est une fonction définie sur $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_k(\Omega)$ et $Y_k = f(X_1, \ldots, X_k)$ alors

$$E(Y_k) = \sum_{(x_1,\ldots,x_k)\in X_1(\Omega)\times\ldots\times X_k(\Omega)} f(x_1, \ldots, x_k)\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_k = x_k])$$

On note (H_k) la propriété suivante :

Si $X_1, \ldots, X_k$ sont des variables aléatoires finies indépendantes, f et g deux fonctions définies sur $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_k(\Omega)$ et k-croissantes sur cet ensemble, et si l'on pose $Y_k = f(X_1, \ldots, X_k)$ et $Z_k = g(X_1, \ldots, X_k)$, alors :

$$E(Y_kZ_k) \geqslant E(Y_k)E(Z_k) \qquad \text{(inégalité de Harris)}$$

9. Dans cette question, $k = 1$, on pose $X = X_1$ une variable aléatoire finie, f et g sont deux fonctions croissantes sur $X(\Omega)$.

   a. Montrer que pour tout $(x, y) \in (X(\Omega))^2$, $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geqslant 0$.

   b. Montrer que pour tout $y \in X(\Omega)$,

$$E(f(X)g(X)) + f(y)g(y) \geqslant g(y)E(f(X)) + f(y)E(g(X))$$

   c. En déduire que (H_1) est vraie.

10. On suppose que (H_k) est vraie pour un certain k et on considère $X_1, \ldots, X_{k+1}$ des variables aléatoires finies indépendantes, f et g deux fonctions définies sur $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_{k+1}(\Omega)$ et $(k+1)$-croissantes.
On pose $Y_{k+1} = f(X_1, \ldots, X_{k+1})$ et $Z_{k+1} = g(X_1, \ldots, X_{k+1})$.

a. A l'aide des théorèmes de transfert d'ordre $k+1$ et k, montrer que :

$$E(Y_{k+1}Z_{k+1}) = \sum_{x \in X_{k+1}(\Omega)} E(f(X_1, \ldots, X_k, x)g(X_1, \ldots, X_k, x))\mathbb{P}(X_{k+1} = x)$$

b. Justifier que pour tout $x \in X_{k+1}(\Omega)$:

$$E(f(X_1, \ldots, X_k, x)g(X_1, \ldots, X_k, x)) \geqslant E(f(X_1, \ldots, X_k, x))E(g(X_1, \ldots, X_k, x))$$

c. On pose pour tout $x \in X_{k+1}(\Omega)$, $u(x) = E(f(X_1, \ldots, X_k, x))$ et $v(x) = E(g(X_1, \ldots, X_k, x))$.
Montrer que u et v sont croissantes sur $X_{k+1}(\Omega)$ et $E(Y_{k+1}Z_{k+1}) \geqslant E(u(X_{k+1})v(X_{k+1}))$.

d. En conclure que (H_{k+1}) est vraie. Conclure.

e. La propriété (H_k) reste-t-elle vraie si f et g sont k-décroissantes ? Justifier votre réponse. Que se passe-t-il si l'une est k-croissante et l'autre k-décroissante ?

Partie 4 – Inégalité de Janson et application

On reprend les notations de la partie 1.

De plus, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $Z_{n,i} = \sum_{k=1}^{i} Y_k$. On remarquera que $Z_{n,r} = Z_n$.

Dans cette partie on établit un encadrement de $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.

11. Justifier que $\bigcap_{0 \leqslant 0 < v \leqslant n-1} [T_{u,v} = 0] \subset [Z_n = 0]$. En déduire que

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \geqslant (1-p)^{\binom{n}{2}} > 0$$

12. Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mathbb{P}(Y_i = 0) = E(1 - Y_i)$ et $\mathbb{P}(Z_{n,i} = 0) = E\left(\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k)\right)$.

13. **a.** On pose $m = \binom{n}{2}$. Justifier brièvement que, pour tout $k \in]\!]1, r[\![$, Y_k s'exprime comme une fonction m-croissante sur $\{0,1\}^m$ des variables aléatoires $T_{u,v}$ pour $u <$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$.

En déduire que, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $1 - Y_i$ puis $\prod_{k=1}^{i-1}(1 - Y_k)$ s'expriment comme des fonctions m-décroissantes des variables aléatoires $T_{u,v}$ pour $u < v$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$.

b. En conclure que, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $\mathbb{P}(Z_{n,i} = 0) \geqslant \mathbb{P}(Z_{n,i-1} = 0)\mathbb{P}(Y_i = 0)$ puis que :

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \geqslant \prod_{k=0}^{r} \mathbb{P}(Y_k = 0) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) \geqslant (1 - p^3)^{\binom{n}{3}}$$

14. *Inégalité de Boole.* Montrer par récurrence sur $k \geqslant 2$ que si $B_1, \ldots, B_n$ sont des événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

► Si A est un événement de probabilité non nulle, on rappelle que la probabilité conditionnelle sachant A est notée $\mathbb{P}_A$. On admet qu'elle possède les mêmes propriétés que la probabilité $\mathbb{P}$. En particulier l'inégalité de Boole est vérifiée par $\mathbb{P}_A$.
De plus si X est une variable finie, on note $E_A(X)$ l'espérance de X pour la probabilité $\mathbb{P}_A$ ce qui signifie que :

$$E_A(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}_A(X = x)$$

Cette espérance conditionnelle possÃ¨de les mêmes propriétés que l'espérance, en particulier l'inégalité de Harris vue dans la partie 3.

15. Soit A, B et C trois événements tels que $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$ et $P(A \cap C) \neq 0$.
Montrer que $\mathbb{P}_{B\cap C}(A) \geqslant \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_{A\cap C}(B)$.

► On admet que les probabilités conditionnelles qui interviennent dans la suite sont bien définies.

16. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $A_i = [Y_i = 0]$.
On note aussi $I_i = \{j \in [\![1, i-1]\!] / j \equiv i\}$ et $J_i = \{j \in [\![1, i-1]\!] / j \not\equiv i\}$.
Soit $i \geqslant 2$. On définit $B_i = \bigcap_{j \in I_i} A_j$ et $C_i = \bigcap_{j \in J_i} A_j$, ainsi on a : $B_i \cap C_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j$.

a. Justifier que A_i et C_i sont indépendants. En déduire que

$$\mathbb{P}_{B_i \cap C_i}(\overline{A_i}) \geqslant \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)$$

b. Etablir que $\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \geqslant 1 - \sum_{j \in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})$.

c. On admet provisoirement que pour $j \in]\!]1, i-1]\!]$ **:**

$$\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j}) \tag{1}$$

En déduire que $\mathbb{P}_{B_i \cap C_i}(A_i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i})\left(1 - \sum_{j \in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right)$.

d. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leqslant \exp(-x)$ et en déduire que :

$$\mathbb{P}_{B_i \cap C_i}(A_i) \leqslant \exp\left(-\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{j \in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})\right)$$

17. On rappelle que $\Delta_n = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} E(Y_i Y_j)$ où $\mathcal{E}$ a été défini dans la partie 1 à la suite de la question **3**.

a. Montrer que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{r} \mathbb{P}_{B_i \cap C_i}(A_i)$.

b. En conclure que :

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \leqslant \exp\left(-E(Z_n) + \frac{\Delta_n}{2}\right) \qquad \text{(inégalité de Janson)}$$

c. En déduire l'encadrement :

$$(1-p^3)^{\binom{n}{3}} \leqslant \mathbb{P}(Z_n=0) \leqslant \exp\left(-\binom{n}{3}p^3+\frac{a_n}{2}p^5\right)$$

18. Soit c un réel strictement positif.

a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\binom{n}{3}\left(\frac{c}{n}\right)^3+\frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{n}\right)^5 = -\frac{c^3}{6}$.

b. Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{3}\ln\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right) = -\frac{c^3}{6}$.

c. On suppose que $n>c$ et $p=\frac{c}{n}$. En déduire que la limite de $\mathbb{P}(Z_n=0)$ quand $n\to+\infty$.

19. On reprend les notations de la partie 2.
L'exécution de l'instruction `fonctionMystere(100)` affiche dans la console Python `0.849`. Est-ce cohérent avec le résultat de la question précédente si on considère que pour x assez petit, e^{-x} est proche de $1-x+\frac{x^2}{2}$?

20. *Démonstration de (1).*
Soit m un entier plus grand que 2. On considère $X_1,\dots,X_m$ des variables de Bernoulli indépendantes et I un sous-ensemble de $]\!]1,m[\![$. On note J le complémentaire de I dans $]\!]1,m[\![$. On note A l'événement $\left[\prod\limits_{i\in I} X_i = 1\right]$.

a. Montrer que, pout tout $(x_1,\dots,x_m)\in\{0,1\}^m$,

$$\mathbb{P}_A([X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m]) = \begin{cases} \prod\limits_{i\in J}\mathbb{P}(X_i=x_i) & \text{si } \prod\limits_{i\in I} x_i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b. En déduire que les variables aléatoires $X_1,\dots,X_m$ sont indépendantes pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.

► Soit $i\geqslant 2$. On reprend les notations de la question **16**.

c. Montrer que pour $j\in]\!]1,i-1[\![$, $\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) = \dfrac{E_{\overline{A_i}}\left(Y_j\prod_{k\in J_i}(1-Y_k)\right)}{\mathbb{P}_{\overline{A_i}}(C_i)}$.

d. En utilisant l'inégalité de Harris, montrer que pour $j\in[\![1,i-1]\!]$:

$$\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$$