Systèmes 2x2

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

2. En déduire que A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible n'ayant que des 1 sur sa diagonale et vérifiant :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \text{avec} \quad \lambda_1 < \lambda_2$$

3. On considère le système différentiel linéaire :

$$(\mathscr{S}) \quad : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & + & 2y(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) & - & 3y(t) \end{array} \right.$$ d'inconnues x et y, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

On posera : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où x et y sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

a. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$

Montrer que (x, y) est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement si les fonctions a et b sont de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifient chacune une équation différentielle d'ordre 1 que l'on résoudra.

b. Montrer que (x, y) est une solution du système $(\mathscr{S})$ si, et seulement s'il existe deux réels α et β vérifiant :
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha e^{-2t} - 2\beta e^{t} \quad$ et $\quad y(t) = -2\alpha e^{-2t} + \beta e^{t}$

c. Déterminer la solution vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$

Exercice 2

On considère le système différentiel linéaire :

$$(\mathscr{S}) \quad : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & x_1(t) & + & 3x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) & - & 4x_2(t) \end{array} \right.$$ d'inconnues x_1 et x_2, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

On posera : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que P est inversible et que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on déterminera. On notera $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

2. Quelles sont les valeurs propres de A ? quels sont les sous-espaces propres associés ?

3. Résoudre les équations différentielles $y' = -y$ et $y' = -2y$ sur $\mathbb{R}$

4. En posant : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, en déduire que les solutions de $(\mathscr{S})$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-2t}$ que l'on explicitera.

5. $(\mathscr{S})$ admet-il un état d'équilibre ? si oui, est-il stable ?

Exercice 3

On considère le système différentiel linéaire :

$$(\mathscr{S}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$ d'inconnues x et y, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

1. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et (E_β) l'équation différentielle $y' = y + \beta e^t$

- **a.** Montrer que la fonction $t \mapsto \beta t e^t$ est une solution de E_β
- **b.** En déduire toutes les solutions de E_β

2. Déterminer une matrice A telle que le système $\mathscr{S}$ s'écrive : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)$

3. Montrer que $A^2 = 2A - I_2$. En déduire que A admet une et une seule valeur propre λ et que le sous-espace propre associé est de dimension 1
La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. On pose $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t) = P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- **a.** Montrer que x et y sont solutions de $(\mathscr{S})$ si, et seulement si a et b vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a'(t) = a(t) + b(t) \quad \text{et} \quad b'(t) = b(t)$$

- **b.** En déduire que x et y sont solutions de $(\mathscr{S})$ si, et seulement s'il existe deux constantes α et β telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = (2\beta t + 2\alpha - \beta)e^t \\ y(t) = (-\beta t + \beta - \alpha)e^t \end{cases}$$

Exercice 4

On fixe un réel a, $|a| \neq 1$

On considère le système différentiel : (E_a) : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = ax_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + ax_2(t) \end{cases}$

On note $X(t) = {}^{\mathbf{t}}(x_1(t), x_2(t))$ et $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ la matrice du système, de sorte que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)$

1.

- **a.** Montrer que : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - 1 = 0$
- **b.** En déduire que A admet deux valeurs propres réelles distinctes et non nulles $\lambda_1 > \lambda_2$
- **c.** Montrer que, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ
- **d.** Déterminer une matrice P inversible de première ligne $(1 \quad 1)$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
- **e.** Justifier que le seul point d'équilibre de E_a est $X^* = {}^{\mathbf{t}}(0 \quad 0)$

2. On suppose dans cette question que $a > 1$

   a. Justifier que $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

   b. Montrer que X^* n'est pas stable.

3. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$

   a. Justifier que $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

   b. Montrer que X^* n'est pas stable.

4. On suppose dans cette question que $a < -1$

   a. Justifier que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

   b. Montrer que X^* est stable.

Systèmes 3x3

Exercice 5

On considère le système différentiel linéaire :

$$(\mathscr{S}) \ : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrr} x'(t) & = & & y(t) \quad +z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & \\ z'(t) & = & x(t) & \end{array} \right.$$

d'inconnues x, y et z, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

On posera : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ avec x, y et z, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

1. Déterminer la matrice A du système différentiel linéaire $(\mathscr{S})$
2. Justifier que A est diagonalisable.
3. Calculer A^3
4. Soit $V_\lambda = {}^{\mathbf{t}}(\lambda, 1, 1)$
   Déterminer une condition sur λ pour que V_λ soit un vecteur propre de A
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Justifier que P est inversible et que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
6. Résoudre $(\mathscr{S})$
7. Déterminer le(s) point(s) d'équilibre de $(\mathscr{S})$ et leur stabilité.

Exercice 6

On considère le système différentiel linéaire :

$$(\mathscr{S}) : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) & = & x(t) & & & & \\ y'(t) & = & & & 2y(t) & + & z(t) \\ z'(t) & = & & & & & 2z(t) \end{cases}$$

d'inconnues x, y et z, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

1. Déterminer la matrice T du système différentiel linéaire $(\mathscr{S})$

2. La matrice T est-elle inversible ?

3. Soit $k \in \mathbb{R}$
On considère l'équation différentielle : $(E_k) : \ y' = 2y + ke^{2t}$

- **a.** Résoudre l'équation homogène associée à (E_k)
- **b.** Déterminer un réel α_k tel que $t \mapsto \alpha_k te^{2t}$ soit une solution particulière de (E_k)
- **c.** En déduire toutes les solutions de (E_k)

4. Résoudre le système différentiel linéaire $(\mathscr{S})$

5. Déterminer la solution vérifiant $x(0) = 0, y(0) = 1$ et $z(0) = 1$

Exercice 7 - système abordé en informatique

On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathscr{S}) : \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x'(t) & = & 3x(t) & - & y(t) & + & z(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & 3x(t) & + & y(t) & - & z(t) \end{cases}$$

On notera $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et A la matrice associée au système

1. Déterminer A et montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 0, 3\}$

2. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : la dernière ligne de P est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et les éléments diagonaux de D sont rangés dans l'ordre croissant.

3. Résoudre $(\mathscr{S})$
On écrira $X(t)$ sous la forme :

$$X(t) = C_0 e^{r_0 t} U + C_1 e^{r_1 t} V + C_2 e^{r_2 t} W$$

U, V, W étant trois vecteurs colonnes à déterminer, r_0, r_1, r_2 trois réels à déterminer, C_0, C_1, C_2 étant des paramètres (constantes quelconques).

4. Déterminer la solution vérifiant $x(0) = -\dfrac{1}{3}, y(0) = -1$ et $z(0) = 1$ et étudier la convergence de cette trajectoire.

5. Emettre une conjecture sur la convergence de la trajectoire vérifiant $x(0) = -0,333333, y(0) = -1$ et $z(0) = 1$