Partie 1 - Nombre aléatoire de triangles

1. r est le nombre de parties à 3 éléments dans l'ensemble des sommets du graphe. Il y a n sommets donc $\boxed{r = \binom{n}{3}}$

2. a. Soit A_k l'événement « t_k est un triangle de G ».
$A_k \iff \{u,v\}, \{v,w\}, \{w,u\}$ sont des arètes du graphe $\iff T_{u,v} = 1 \cap T_{v,w} = 1 \cap T_{w,u} = 1$
Un produit de 3 nombres pris dans $\{0,1\}$ est égal à 1 si et seulement si chacun de ces nombres vaut 1.
Donc $Y_k = T_{u,v}T_{v,w}T_{w,u}$

b. $Y_k(\Omega) = \{0,1\}$ donc Y_k suit une loi de Bernoulli.
$P(Y_k = 1) = P(T_{u,v} = 1 \cap T_{v,w} = 1 \cap T_{w,u} = 1)$
Par hypothèse de l'énoncé, $T_{u,v}$, $T_{v,w}$ et $T_{w,u}$ sont des variables de Bernoulli indépendantes.
Donc $P(Y_k = 1) = P(T_{u,v} = 1)P(T_{v,w} = 1)P(T_{w,u} = 1) = p^3$.
Donc Y_k suit bien une loi de Bernoulli de paramètre p^3.

c. Y_k permet de savoir si la partie à 3 éléments t_k de τ est un triangle du graphe.
τ a r éléments, donc $Z_n = \sum_{k=1}^{r} Y_k$.
Donc, par linéarité de l'espérance, $E(Z_n) = \sum_{k=1}^{r} E(Y_k) = \sum_{k=1}^{r} p^3 = \binom{n}{3} p^3$

3. a. $V(Z_n)$ existe car $Z_n(\Omega)$ est fini.

$$\begin{aligned}
V(Z_n) &= Cov(Z_n, Z_n) = Cov\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} Cov\left(Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) \quad \text{linéarité de Cov sur la première composante} \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} Cov\left(Y_i, Y_j\right) \quad \text{linéarité de Cov sur la deuxième composante} \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} Cov\left(Y_i, Y_j\right)
\end{aligned}$$

b. Si $(i,j) \in \mathcal{F}$, $i \neq j$ et $i \not\equiv j$, il y a deux possibilités :

- t_i et t_j n'ont aucun sommet commun et dans ce cas Y_i et Y_j sont indépendantes.
- t_i et t_j ont un sommet commun et un seul u. $Y_i = T_{u,v}T_{v,w}T_{w,u}$ et $Y_j = T_{u,y}T_{y,z}T_{z,u}$ avec u, v, w, y, z distincts. Les variables T intervenants ici sont toutes distinctes et indépendantes donc Y_i et Y_j sont indépendantes.

Donc, si $(i,j) \in \mathcal{F}$ (et i, j distincts), $Cov(Y_i, Y_j) = 0$.

On continue le développement de la formule donnant $V(Z_n)$ en la décomposant la somme double.

$$\begin{aligned}
V(Z_n) &= \sum_{i=1}^{r} Cov(Y_i, Y_i) + \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2, i\neq j} Cov(Y_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{r} V(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} Cov(Y_i, Y_j) + \underbrace{\sum_{(i,j)\in\mathcal{F}} Cov(Y_i, Y_j)}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{r} V(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} Cov(Y_i, Y_j)
\end{aligned}$$

c. On sait que $V(Y_i) = p^3(1-p)^3$ car Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p^3.
On sait aussi que $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ donc
$Cov(Y_i, Y_j) = E(Y_iYj) - E(Y_i)E(Y_j) = E(Y_iY_j) - (p^3)(p^3) = E(Y_i)E(Y_j) - p^6$

L'énoncé note a_n le cardinal de $\mathcal{E}$, donc $\quad V(Z_n) = rp^3(1-p)^3 + \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} E(Y_iY_j)\right) - a_np^6$

4. Si $i \equiv j$, t_i et t_j ont deux éléments en commun u et v.
$Y_i = T_{u,v}T_{v,w}T_{w,u}$ et $Y_j = T_{u,v}T_{v,y}T_{y,u}$ avec u, v, w, y distincts.
Comme $T_{u,v}T_{u,v} = T_{u,v}$ on a $Y_iY_j = T_{u,v}T_{v,w}T_{w,u}T_{v,y}T_{y,u}$
Les variables de type T dans ce produit sont indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, donc $E(Y_iY_j) = p^5$.
Donc, comme ce résultat ne dépend pas de i et j, $\Delta_n = Card(\mathcal{E})p^5 = a_np^5$.
En reportant dans la formule précédente donnant $V(Z_n)$, on obtient, compte tenu du fait que $r = \binom{n}{3}$:

$$V(Z_n) = \binom{n}{3}(p^3 - p^6) + a_n(p^5 - p^6)$$

5. **a.** On dénombre pas à pas.
On commence par choisir $\{u, v\}$: $\binom{n}{2}$ possibilités, soit $\frac{n(n-1)}{2}$.
On choisit ensuite w : $n-2$ choix possibles.
Enfin, on choisit y : $n-3$ choix possibles.
Au total : $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$ façons de choisir les triplets $(\{u,v\}, w, y)$ où u, v, w, y sont quatre éléments distincts de $[\![0, n-1]\!]$.

b. Soit t_i et t_j deux triangles de $\mathcal{E}$ ayant deux éléments en commun u et v. On a donc $t_i = \{u, v, w\}$ et $t_j = \{u, v, y\}$ avec u, v, w, y distincts. Autrement dit : $i \equiv j \iff \exists(u, v, w, y) \in [\![0, n-1]\!]^4$ tels que $t_i = \{u, v, w\}$, $t_j = \{u, v, y\}$ avec u, v, w, y distincts.
Dans la construction de t_i et t_j, on choisit $\{u, v\}$, puis w puis y.
Donc $Card(\mathcal{E}) = a_n = \binom{n}{2} \times (n-2) \times (n-3) = \frac{n(n-1)}{2}(n-2)(n-3)$

Partie 2 - Etude informatique

6. La question est plus délicate qu'elle n'y parait, car le fait de donner un script à compléter nous oblige à rentrer dans une logique et dans des modes d'écriture Python qui ne sont pas évidentes. On parcourt la liste des éléments adjacents à s et on regarde si $adj[i]$ et $adj[j]$ sont liés :

```python
def triangle2s(s,L):
    cpt=0
    adj=L[s]
    for i in range(len(adj)):
        for j in range(i+1,len(adj)):
            if adj[i] in L[adj[j]]:
                cpt += 1
    return(cpt)
```

7. On commence par décompter le nombre de triangle à partir du nœud $n-1$ (le dernier), puis on enlève ce nœud du graphe et on s'intéresse ensuite au nœud $n-2$ du nouveau graphe, et ainsi de suite ... On fait donc une boucle descendante.

```python
def nbTriangles(L):
    n=len(L)
    c=0
    for k in range(n-1,-1,-1):
        c=c+triangle2s(k,L)
        supprimeDer(L)
    return(c)
```

8. Dans cette `fonctionMystere`, on reconnait la mise en place de la méthode de Monte Carlo permettant d'obtenir la fréquence f_n de l'événement « le nombre de triangle du graphe est nul »dans une suite de 1000 expériences simulées.
On obtient donc, d'après la loi faible des grands nombres, une estimation de la probabilité $P(Z_n = 0)$ dans le graphe (de n sommets) généré comme décrit par l'énoncé en préambule, avec $p = \dfrac{1}{n}$.

Remarque : pour ceux qui avaient des hésitations, l'énoncé fournissait la réponse en question 18 c. Comme quoi une lecture préalable de l'énoncé peut-être utile.

Partie 3 - Inégalité de Harris

9. **a.** Soit $(x, y) \in (X(\Omega))^2$.
Si $x = y$, on a $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) = 0$ donc l'inégalité est vérifiée.
Si $x \neq y$, $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant 0$ et $\dfrac{g(x) - g(y)}{x - y} \geqslant 0$ du fait que f et g sont croissantes sur $X(\Omega)$.
Donc, par produit : $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \times \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y} \geqslant 0$
ou encore $\dfrac{(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))}{(x - y)^2} \geqslant 0$.
On a bien $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geqslant 0$

b. Soit $y \in X(\Omega)$. On pose $T = (f(X) - f(y))(g(X) - g(y))$.
D'après la question précédente, T est une variable aléatoire positive (finie), donc $E(T) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left[f(X)g(X) - f(y)g(X) - f(X)g(y) + f(y)g(y)\right] \\ &= E[f(X)g(X)] + f(y)g(y) - f(y)E[g(X)] - g(y)E[f(X)] \end{aligned}$$

Comme $E(T) \geqslant 0$, on a bien $E[f(X)g(X)] + f(y)g(y) \geqslant g(y)E[f(X)] + f(y)E[g(X)]$

c. Avec les notations de l'énoncé, (H_1) s'écrit $E(Y_1Z_1) \geqslant E(Y_1)E(Z_1)$ avec ici $Y_1 = f(X)$ et $Z_1 = g(X)$.
On doit donc montrer que $E(f(X)g(X)) \geqslant E(f(X))E(g(X))$.

Posons $U = E(f(X)g(X)) + f(X)g(X) - g(X)E(f(X)) - f(X)E(g(X))$ ce qui revient à prendre $y = X$ dans l'inégalité précédente.
On a donc $E(U) \geqslant 0$. Or

$$\begin{aligned} E(U) &= E(f(X)g(X)) + E(f(X)g(X)) - E(f(X)E(g(X)) - E(g(X))E(f(X)) \\ &= 2E(f(X)g(X)) - 2E(f(X)E(g(X)) \end{aligned}$$

Comme $E(U) \geqslant 0$, on a bien $E(f(X)g(X)) \geqslant E(f(X))E(g(X))$

10. **a.** On pose $Y_{k+1}Z_{k+1} = h(X_1, \dots X_{k+1})$.
D'après le théorème de transfert :
$E(Y_{k+1}Z_{k+1}) = \displaystyle\sum_{(x_1,\dots,x_{k+1})\in X_1(\Omega)\times\dots X_{k+1}(\Omega)} h(x_1, \dots x_{k+1})P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_{k+1} = x_{k+1}])$
Soit $x = x_{k+1}$ fixé dans $X_{k+1}(\Omega)$. On note :
$A(x) = \displaystyle\sum_{(x_1,\dots,x_k)\in X_1(\Omega)\times\dots X_k(\Omega)} h(x_1, \dots, x_k, x)P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_k = x_k] \cap (X_{k+1} = x)$
$A(x) = \left(\displaystyle\sum_{(x_1,\dots,x_k)\in X_1(\Omega)\times\dots X_k(\Omega)} h(x_1, \dots, x_k, x)P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_k = x_k]\right) P(X_{k+1} = x)$
Donc $A(x) = E(h(X_1, \dots, X_k, x))P(X_{k+1} = x)$
En faisant varier $x = x_{k+1}$ sur $X_{k+1}(\Omega)$, on obtient bien :
$E(Y_{k+1}Z_{k+1}) = \displaystyle\sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} E(h(X_1, \dots, X_k, x))P(X_{k+1} = x)$

b. Soit $\widetilde{f}$ la fonction définie par $\widetilde{f}(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k, x)$
et $\widetilde{g}$ la fonction définie par $\widetilde{g}(x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_k, x)$
Les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{f}$ sont k croissantes.
L'hypothèse de récurrence (H_k) permet d'affirmer :

$$E(\widetilde{f}(X_1, \dots X_k)\widetilde{g}(X_1, \dots X_k)) \geqslant E(\widetilde{f}(X_1, \dots X_k))E(\widetilde{g}(X_1, \dots X_k))$$

c. Comme f est $k+1$ croissante, si a et b sont pris dans $X_{k+1}(\Omega)$ avec $a \leqslant b$:
$f(X_1, \dots, X_k, a) \leqslant f(X_1 \dots, X_k, b)$
Par croissance de l'espérance $E(f(X_1, \dots, X_k, a)) \leqslant E(f(X_1, \dots, X_k, b))$ donc u est croissante sur $X_{k+1}(\Omega)$.
De même, v est croissante sur $X_{k+1}(\Omega)$.

Partons de la question 10) a :

$$\begin{aligned} E(Y_{k+1}Z_{k+1}) &= \sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} E(f(X_1, \dots, X_k, x)g(X_1, \dots, X_k, x))P(X = x) \\ &\quad \text{on utilise 10) b :} \\ &\geqslant \sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} \underbrace{E(f(X_1, \dots, X_k, x))E(g(X_1, \dots, X_k, x))}_{=u(x)v(x)} P(X = x) \\ &\geqslant \sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} u(x)v(x)P(X = x) \\ &\geqslant E(u(X_{k+1})v(X_{k+1})) \end{aligned}$$

d. Comme u et v sont croissantes, on peut utiliser (H_1).
$E(u(X_{k+1})v(X_{k+1})) \geqslant E(u(X_{k+1}))E(v(X_{k+1}))$

$$\begin{aligned}
E(u(X_{k+1})) &= \sum_{x\in X(\Omega)}\left(\sum_{(x_1,\dots x_k)} f(x_1,\dots,x_k,x)P([X_1=x_1]\cap\dots[X_k=x_k])\right)P(X=x) \\
& \quad \text{On utilise l'indépendance :} \\
&= \sum_{(x_1,\dots x_k,x_{k+1})} f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})P([X_1=x_1]\cap\dots[X_k=x_k]\cap[X_{k+1}=x_{k+1}]) \\
&= E(f(X_1,\dots,X_{k+1})) \qquad \text{par le th. de transfert} \\
&= E(Y_{k+1})
\end{aligned}$$

De même $\quad E(v(X_{k+1})) = E(Z_{k+1})$, donc
$E(Y_{k+1}Z_{k+1}) \geqslant E(u(X_{k+1}))E(v(X_{k+1})) = E(Y_{k+1})E(Z_{k+1}) \qquad$ donc H_{k+1} est vérifié.

H_k est initialisée (question 9 c) et héréditaire (question 10 c), donc, par le principe de récurrence, (H_k) est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
On a démontré l'inégalité de Harris pour $k \in \mathbb{N}^*$.

e. Si f et g sont décroissantes, l'inégalité de la question 9 a est toujours valable donc (H_1) est toujours valable.
La justification de l'hérédité se fait en suivant la même démarche sans problème. Donc l'inégalité de Harris est encore vérifiée.

Dans le cas d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante, l'inégalité du 9) a est inversée et, en poursuivant la même démarche, on obtiendra $\qquad E(Y_kZ_k) \leqslant E(Y_k)E(Z_k)$.

Ce résultat est intuitif, car on a observé (en statistique particulièrement) que si X et Y variaient dans le même sens, $Cov(X,Y) \geqslant 0$ et que si X et Y variaient dans des sens contraires, $Cov(X,Y) \leqslant 0$

Partie 4 - Inégalité de Janson et application

12. Si tous les $T_{u,v}$ possibles sont nul, alors $Z_n = 0$ donc $\displaystyle\bigcap_{0\leqslant u<v\leqslant n}[T_{u,v}=0] \subset [Z_n=0]$

Donc $P\left(\displaystyle\bigcap_{0\leqslant u<v\leqslant n}[T_{u,v}=0]\right) \leqslant P(Z_n=0)$.
L'énoncé nous dit que tous les $T_{u,v}$ sont indépendants et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.
Il y a $\displaystyle\binom{n}{2}$ sous ensembles $\{u,v\}$ vérifiant $0 \leqslant u < v \leqslant n$ donc
$P\left(\displaystyle\bigcap_{0\leqslant u<v\leqslant n}[T_{u,v}=0]\right) = (1-p)^{\binom{n}{2}}$.
On a bien $P(Z_n=0) \geqslant (1-p)^{\binom{n}{2}}$

13. On a vu que Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p^3.
$P(Y_i=0) = 1-p^3$ et $E(Y_i) = p^3$, d'où $\qquad P(Y_i=0) = E(1-Y_i)$

Posons $U_i = \prod_{k=1}^{i}(1-Y_k)$. C'est est un produit de i variables de Bernoulli, donc U_i est une variable de Bernoulli de paramètre $P(U_i=1)$.
Or $U_i = 1 \iff \forall k \in [\![1,i]\!] \quad Y_k = 0 \iff Z_{n,i} = 0$
Donc $P(Z_{n,i}=0) = P(U_i=1) = E(U_i)$

14. **a.** On a vu que $Y_k = T_{u,v}T_{v,w}T_{u,w}$ où $t_k = \{u,v,w\}$. Y_k est le produit de 3 fonctions croissantes positives donc est croissante.

Donc $1-Y_i$ est m-décroissante et $\prod_{k=1}^{i-1}(1-Y_i)$ est m décroissante comme produit de fonctions m-décroissantes positives.

b. $P(Z_{n,i}=0) = E\left((1-Y_i)\prod_{k=1}^{i-1}(1-Y_k)\right)$

On utilise l'inégalité de la partie précédente :
$E\left((1-Y_i)\prod_{k=1}^{i-1}(1-Y_k)\right) \geqslant E(1-Y_i)E\left(\prod_{k=1}^{i-1}(1-Y_k)\right) = P(Y_i=0)P(Z_{n,i-1}=0)$.
C'est bien l'inégalité demandée.

Notons $u_i = P(Z_{n,i}=0)$.
On vient de voir que $\quad \forall i \in [\![2,r]\!] \quad u_i \geqslant u_{i-1}P(Y_i=0)$

$u_r \geqslant u_{r-1}P(Y_r=0) \geqslant u_{r-2}P(Y_{r-1}=0)P(Y_r=0) \geqslant \ldots \geqslant u_2\prod_{k=3}^{r}P(Y_k=0) \geqslant u_1\prod_{k=2}^{r}P(Y_k=0)$

Or $u_1 = P(Z_{n,1}=0) = P(Y_1) = 0$

Donc $P(Y_r=0) \geqslant \prod_{k=1}^{r}P(Y_k=0)$

Or $P(Y_k=0) = 1-p^3$ et $r = \binom{n}{3}$ donc $\prod_{k=1}^{r}P(Y_k=0) = (1-p^3)^{\binom{n}{3}}$

On a bien $P(Z_n=0) \geqslant (1-p^3)^{\binom{n}{3}}$

15. Posons, pour $k \in \mathbb{N} \quad k \geqslant 2 \qquad \mathcal{P}_k : \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{k}B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k}P(B_i)$

Montrons $\mathcal{P}_k$ par récurrence sur $k \geqslant 2$.

- Pour $k=2 \qquad P(B_1 \cup B_2) = P(B_1)+P(B_2)-P(B_1\cap B_2) \leqslant P(B_1)+P(B_2)$
  donc $\mathcal{P}_2$ est vérifié.
- Supposons $\mathcal{P}_k$ vérifié pour $k \geqslant 2$.

Posons $A = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) &= P(A \cup B_{k+1}) = P(A) + P(B_{k+1}) - P(A \cap B_{k+1}) \\ &\leqslant P(A) + P(B_{k+1}) \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} P(B_i)\right) + P(B_{k+1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifié.

Par récurrence, $\mathcal{P}_k$ est vérifié pour tout $k \in \mathbb{N} \quad k \geqslant 2$

16. On remarque que $P(C) \neq 0$ car si $P(C) = 0$, on aurait $P(B \cap C) = 0$ aussi.

$P_{B\cap C}(A) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$

$P_C(A)P_{A\cap C}(B) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} \times \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap C)} = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$

Or $B \cap C \subset C$ donc $P(B \cap C) \leqslant P(C)$ ou encore $\quad \dfrac{1}{P(B \cap C)} \geqslant \dfrac{1}{P(C)}$

En multipliant par $P(A \cap B \cap C)$, on obtient $\quad P_{B\cap C}(A) \geqslant P_C(A)P_{A\cap C}(B)$

17. **a.** C_i dépend des Y_j pour $i \in [\![1, i-1]\!]$ vérifiant $j \not\equiv i$. On a vu que dans ce cas, Y_j et Y_i sont indépendantes. Par le lemme des coalitions, C_i et A_i sont indépendants.

D'après 15) $\quad P_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i}) \geqslant P_{C_i}(\overline{A_i})P_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)$

Or $P_{C_i}(\overline{A_i}) = P(A_i)$ car A_i et C_i sont indépendants.

On a bien $\quad P_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i}) \geqslant P(\overline{A_i})P_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)$

b. D'après 14) $\quad \sum_{j\in I_i} P_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \geqslant P_{\overline{A_i}\cap C_i}\left(\bigcup_{j\in I_i} \overline{A_j}\right)$

Or $\bigcup_{j\in I_i} \overline{A_j} = \overline{\bigcap_{j\in I_i} A_j} = \overline{B_i}$

Donc $P_{\overline{A_i}\cap C_i}\left(\bigcup_{j\in I_i} \overline{A_j}\right) = P_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{B_i}) = 1 - P_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)$

On a donc bien $\quad P_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \geqslant 1 - \sum_{j\in I_i} P_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})$

c. On admet (1) donc $-P_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \geqslant -P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$ et donc

$1 - \sum_{j\in I_1} P_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \geqslant 1 - \sum_{j\in I_i} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j}) \quad (2)$

Puis, $P_{B_i\cap C_i}(A_i) = 1 - P_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i})$ et

$$\begin{aligned} P_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i}) &\geqslant P(\overline{A_i})P_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \\ &\geqslant P(\overline{A_i})\left(1 - \sum_{j\in I_i} P_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})\right) \\ &\geqslant P(\overline{A_i})\left(1 - \sum_{j\in I_i} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right) \quad \text{d'après (2)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P_{B_i \cap C_i}(A_i) &= 1 - P_{B_i \cap C_i}(\overline{A_i}) \\ &\leqslant 1 - P(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j}) \right) \end{aligned}$$

d. La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, donc au dessus de toutes ses tangentes. Or sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$, donc $\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x \leqslant e^x$.
En remplaçant x par $-x$ on obtient prenant $1 - x \leqslant e^{-x}$.

Commençons par remarquer que $1 - \sum_{j \in I_i} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j}) = 1 - \sum_{j \in I_1} \dfrac{P(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})}{P(\overline{A_i})}$

Posons $x = P(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j}) \right)$

On a donc $x = P(\overline{A_i}) - \sum_{j \in I_i} P(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})$

L'inégalité de convexité précédente permet d'écrire

$$P_{B_i \cap C_i}(A_i) \leqslant \exp\left(-P(\overline{A_i}) + \sum_{j \in I_i} P(\overline{A_j} \cap \overline{A_i}) \right)$$

18. **a.** On a immédiatement $(Z_n = 0) = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$ La formule des probas composées dit que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i \right) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{r-1}}(A_r)$$

L'énoncé nous a fait remarquer que $\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j = B_i \cap C_i$ donc

$$P(Z_n = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i \right) = P(A_1) \prod_{i=2}^{r} P_{B_i \cap C_i}(A_i)$$

b. En utilisant 16) d, on obtient l'inégalité suivante :

$$P(Z_n = 0) \leqslant P(A_1) \exp\left(-\sum_{i=2}^{r} P(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r} \sum_{j \in I_i} P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) \right)$$

$P(A_1) = 1 - P(A_1) \leqslant \exp(-P(A_1))$ donc

$$P(Z_n = 0) \leqslant \exp\left(-\sum_{i=1}^{r} P(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r} \sum_{j \in I_i} P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) \right)$$

Or $E(Z_n) = \sum_{i=1}^{r} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} P(\overline{A_i})$

On remarque que pour $i = 1$, I_1 est vide donc $\sum_{j \in I_i} P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) = 0$

$P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) = P((Y_i = 1) \cap (Y_j = 1)) = P(Y_i Y_j = 1) = E(Y_i Y_j)$.

$$\sum_{i=2}^{r} \sum_{j \in I_i} P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \in I_i} P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}^2} E(Y_i Y_j) = \frac{1}{2} \Delta_n$$

Donc

$$-\sum_{i=1}^{r} P(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r} \sum_{j \in I_i} P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) = -E(Z_n) + \frac{1}{2} \Delta_n$$

Le facteur $\dfrac{1}{2}$ est due à l'égalité de $E(Y_iY_j)$ et $E(Y_jY_i)$ et la présence de (i,j) et (j,i) dans $\mathcal{E}^2$.

Donc $\qquad P(Z_n=0) \leqslant \exp\left(-E(Z_n)+\dfrac{\Delta_n}{2}\right)$

c. On a vu (dans la partie 2) que $\qquad E(Z_n)=\dbinom{n}{3}\,p^3$ et $\Delta_n=a_np^5$

On a également vu (dans la partie 4) que $P(Z_n=0)\geqslant(1-p^3)^{\binom{n}{3}}$

On peut faire la synthèse : $\qquad (1-p^3)^{\binom{n}{3}} \leqslant P(Z_n=0)\leqslant \exp\left(-\dbinom{n}{3}\,p^3+\dfrac{a_n}{2}\,p^5\right)$

19. **a.** $-\dbinom{n}{3}\left(\dfrac{c}{n}\right)^3+\dfrac{a_n}{2}\left(\dfrac{c}{n}\right)^5=-\dfrac{c^3}{n^3}\;\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}+c^5\dfrac{a_n}{2n^5}$

On a vu que $a_n\sim\dfrac{n^4}{2}$ $\quad$ (question 5 b) $\quad$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{2n^5}=0.$

Il est clair que $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{c^3}{n^3}\;\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=\dfrac{c^3}{6}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dbinom{n}{3}\left(\dfrac{c}{n}\right)^3+\dfrac{a_n}{2}\left(\dfrac{c}{n}\right)^5=-\dfrac{c^3}{6}$

b. On sait que, si x est voisin de 0, $\ln(1+x)\sim x$

$\dfrac{c^3}{n^3}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $\qquad \ln\left(1-\dfrac{c^3}{n^3}\right)\sim-\dfrac{c^3}{n^3}$

Par ailleurs, quand n tend vers $+\infty$, $\dbinom{n}{3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\sim\dfrac{n^3}{6}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dbinom{n}{3}\ln\left(1-\dfrac{c^3}{n^3}\right)=-\dfrac{c^3}{6}$

c. De cette dernière limite, on en déduit que $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\dfrac{c}{n}\right)^2\right)^{\binom{n}{3}}=\exp\left(-\dfrac{c^3}{6}\right).$

On fait la synthÃ¨se. Si $p=\dfrac{c}{n}$, en utilisant l'encadrement de la question 17 c et les deux limites précédentes, par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}P(Z_n=0)=\exp\left(-\frac{c^3}{6}\right)}$$

20. Dans la partie 2, on obtient une valeur approchée de $P(Z_n=0)$ dans le cas où $p=\dfrac{1}{n}$ donc $c=1$.

En théorie, on devrait obtenir une valeur proche de $\exp\left(-\dfrac{1}{6}\right)$. A ce niveau de profondeur du sujet, l'énoncé pourrait donner une valeur approchée de $\exp\left(-\dfrac{1}{6}\right)$ soit $0,8464...$, ce serait plus simple. Mais suivons le cheminement tortueux du fil du sujet.

L'énoncé nous dit que, pour x petit, e^{-x} est proche de $1-x+\dfrac{x^2}{2}$ (c'est la partie principale du DL_2 de e^{-x} au voisinage de 0).

$\exp\left(-\dfrac{1}{6}\right)\simeq 1-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{72}\simeq\dfrac{72-12+1}{72}=\dfrac{61}{72}$

On pose la division, comme au CM_2, et on trouve 0.847222...

C'est vrai que la simulation est efficace.

21. **a.** $P_A([X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m])=\dfrac{P(A\cap[X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m])}{P(A)}$

Or $A\cap[X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m]=\emptyset$ si $\displaystyle\prod_{i\in I}x_i\neq 1$.

Si $\displaystyle\prod_{i\in I}x_i=1$, on a donc $[X_i=x_i]_{i\in I}=[X_i=1]_{i\in I}$ donc

$A\cap[X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m]=\displaystyle\bigcap_{i\in I}[X_i=1]\ \bigcap_{i\in J}[X_i=x_i]$

Les variables X_i étant indépendantes, $P(A)=\displaystyle\prod_{i\in I}P([X_i=1])$

$P(A\cap[X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m])=\displaystyle\prod_{i\in I}P(X_i=1)\times\prod_{i\in J}P(X_i=x_i)$

On a donc bien :

$$P_A([X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m])=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i\in J}P(X_i=x_i) & \text{si } \displaystyle\prod_{i\in I}x_i=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

b. Si $i\in I$, $P_A([X_i=x_i])=1$ si $x_i=1$ et vaut 0 sinon.

Si $i\in J$, $P_A([X_i=x_i])=\dfrac{P(A\cap[X_i=x_i])}{P(A)}=\dfrac{P(A)P([X_i=x_i])}{P(A)}=P([X_i=x_i])$

Donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}P_A([X_i=x_i])=0$ si un des X_i est nul pour $i\in I$

et $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}P_A([X_i=x_i])=\prod_{i\in J}P([X_i=x_i])$ si tous les x_i valent 1 pour $i\in I$.

En d'autres termes $P_A([X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m])=\displaystyle\prod_{i=1}^{m}P_A([X_i=x_i])$

c. $P_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})=\dfrac{P(\overline{A_i}\cap C_i\cap\overline{A_j})}{P(\overline{A_i}\cap C_i)}=\dfrac{P(\overline{A_i}\cap C_i\cap\overline{A_j})}{P(\overline{A_i})P_{\overline{A_i}}(C_i)}=\dfrac{P_{\overline{A_i}}(C\cap\overline{A_j})}{P_{\overline{A_i}}(C_i)}$

Posons $W=Y_j\displaystyle\prod_{k\in J_i}(1-Y_k)$.

W est une variable de Bernoulli, donc $E_{\overline{A_i}}(W)=P_{\overline{A_i}}(W=1)$.

Or $[Y_j=1]=\overline{A_j}$ et $\left(\displaystyle\prod_{k\in J_i}(1-Y_k)=1\right)=C_i$ donc $(W=1)=\overline{A_j}\cap C_i$

Et $E_{\overline{A_j}}(W)=P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j}\cap C_i)$

On a donc bien l'égalité demandée.

d. Selon la question 13) a, Y_j est une fonction m-croissante et $\displaystyle\prod_{k\in J_i}(1-Y_k)$ est une fonction m-décroissante des variables $T_{u,v}$.

Les variables $T_{u,v}$ sont indépendantes.

Si $t_i=u,v,w$, $\overline{A_i}=[Y_i=1]=[T_{u,v}T_{v,w},T_{w,u}=1]=[T_{u,v}=1][T_{v,w}=1][T_{w,u}=1]$

Donc, en appliquant la question 20) b, les variables $T_{u,v}$ sont indépendantes pour la probabilité $P_{\overline{A_i}}$.

L'inégalité de Harris (dans le cas décroissant $\times$ croissant) donne alors :

$$E_{\overline{A_i}}\left(Y_j\prod_{k\in J_i}(1-Y_k)\right)\leqslant E_{\overline{A_i}}(Y_j)E_{\overline{A_i}}\left(\prod_{k\in J_i}(1-Y_k)\right)=P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\ P_{\overline{A_i}}(C_i)$$

En reportant, dans l'égalité obtenue en 20) c , on a donc bien $P_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})\leqslant P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$