Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :

- manipuler les termes application linéaire, endomorphisme, isomorphisme ☐
- écrire la matrice d'une application linéaire selon des bases ☐
- manipuler une composée d'applications linéaires et l'écriture matricielle associée ☐
- déterminer le noyau, l'image, le rang d'une application linéaire (ou d'une matrice) ☐
- utiliser le théorème du rang ☐
- montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme ☐
- écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases quelconques ☐
- écrire des matrices de passage d'une base à une autre ☐
- utiliser les formules de changement de base pour les vecteurs ou les endomorphismes, et faire le lien avec les matrices semblables ☐

1 Applications linéaires, introduction

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_p)$ et F est un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{C} = (f_1, \dots f_n)$

1.1 Définition

Définition : une application de E vers F est dite **linéaire** si : $\boxed{\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y) \in E^2,\ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)}$ cette définition est équivalente à $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2\ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$	Remarques : on peut résumer en disant que les applications linéaires « conservent » les combinaisons linéaires, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images. Exemples : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 5x \end{array}$, $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 5x-y, 2x) \end{array}$ sont des application linéaires
Définitions : • un **isomorphisme** est une application linéaire bijective • un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans E, on note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E	Remarques : on pourra retenir • « iso » pour « même » (E et F ont alors forcément même dimension) • « endo » pour « interne ».

Méthode : comment montrer qu'une application $u : E \to F$ est linéaire ?

Choisir deux vecteurs quelconques x, y, un réel quelconque λ, et, au choix :
- calculer $u(\lambda x + y)$ et montrer que ce vecteur est égal à $\lambda u(x) + u(y)$
- calculer $u(x+y)$ et $u(\lambda x)$ et montrer que $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et que $u(\lambda x) = \lambda u(x)$

1.2 Ecriture matricielle

Comme vu en première année, on peut faire l'analogie entre l'application linéaire :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 5x-y, 2x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ 5x-y \\ 2x \end{pmatrix} \end{array} = AX \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, avec $u \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $x \in E$, comme $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, on peut écrire : $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et donc, comme u est linéaire, $\boxed{u(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j)}$

$(u(e_1),\dots,u(e_p))$ est alors une famille de vecteurs de F dont chaque vecteur se décompose dans la base $\mathscr{C} = (f_1,\dots f_n)$:

$$X_{\mathscr{C}}(u(e_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad X_{\mathscr{C}}(u(e_2)) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad X_{\mathscr{C}}(u(e_p)) = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

on regroupe alors ces coefficients dans une matrice qu'on appelle **matrice représentant u relativement aux bases $\mathscr{B}$ de départ et $\mathscr{C}$ d'arrivée**, et notée :

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est donc la matrice des **coordonnées** des images de la base de départ.

Remarque : dans le cas d'un endomorphisme, on note $M_{\mathscr{B}}(u)$ pour $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$

La donnée d'une matrice caractérise entièrement l'application linéaire associée. On utilisera donc **très souvent** (voire systématiquement) une matrice associée pour étudier une application linéaire.

Propriété : soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ dont la matrice est M suivant les bases $\mathscr{B}$ de départ, et $\mathscr{C}$ d'arrivée. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$ muni des bases canoniques, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ est appelé **application canoniquement associée** à M	Exemple : avec g vue plus haut $\mathscr{B} = (1, x, x^2, x^3)$ est la base canonique $g(1) = 0$ $g(x) = 1$ $g(x^2) = 2x$ $g(x^3) = 3x^2$ donc $M_{\mathscr{B}}(g)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1.3 Lien entre calcul vectoriel et calcul matriciel

Soit $x \in E$, de coordonnées $X_{\mathscr{B}} = {}^t(x_1,\dots x_p)$ relativement à la base $\mathscr{B}$, et $y = u(x)$, de coordonnées $Y_{\mathscr{C}} = {}^t(y_1,\dots y_n)$ relatives à la base $\mathscr{C}$. On a vu que $y = u(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j)$

par définition du produit matriciel, cela se traduit, en coordonnées, par :

$$Y_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ soit : } \boxed{y = u(x) \iff Y_{\mathscr{C}} = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) X_{\mathscr{B}}}$$

Les coordonnées de l'image d'un vecteur x par l'application linéaire u se calculent par la multiplication d'une matrice par un vecteur colonne : celui des coordonnées du vecteur x

1.4 Opérations et composée d'applications linéaires

1.4.1 Combinaisons linéaires

Propriété : avec les mêmes notations $$\boxed{M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u+v)=\lambda M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)+M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)}$$	Exemple : avec id_E l'application identité sur E ($\in \mathscr{L}(E)$) et si $A=M_{\mathscr{B}}(u)$ alors $M_{\mathscr{B}}(u+id_E)=M_{\mathscr{B}}(u)+M_{\mathscr{B}}(id_E)$ $=M_{\mathscr{B}}(u)+I_n$

1.4.2 Composée d'applications linéaires

Propriété : lorsque elle définie, la composée d'applications linéaires est une application linéaire	Démonstration : $g\circ f(\lambda x+y)=g(f(\lambda x+y))$ $=g(\lambda f(x)+f(y))=\lambda g(f(x))+g(f(y))$ $=\lambda g\circ f(x)+g\circ f(y)$
Propriété : si G est un espace vectoriel et $\mathscr{D}$ une de ses bases si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(F,G)$, alors : $$\boxed{M_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v\circ u)=M_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v)M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)}$$ autrement dit, la matrice d'une composée est le produit des matrices de chaque application. en particulier, pour deux endomorphismes : $$\boxed{M_{\mathscr{B}}(v\circ u)=M_{\mathscr{B}}(v)M_{\mathscr{B}}(u)}$$	Démonstration : l'analogie $f(x)$" = "AX et $g(y)$" = "BY donne $g\circ f(x)=g(f(x))$" = "$g(AX)$" = "BAX Exemple : avec $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2), u:(x,y)\mapsto(3x-7y,-2x+y)$ et $v\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2), v:(x,y)\mapsto(x+y,5x-4y)$ alors dans la base canonique $M_{\mathscr{B}}(v\circ u)=$ $$\begin{pmatrix}3&-7\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-32&31\\3&-6\end{pmatrix}$$
Propriété : puissance d'un endomorphisme pour $u\in\mathscr{L}(E)$, on note $u^2=u\circ u$ $u^n=\underbrace{u\circ u\ldots\circ u}_{n \text{ fois}}$, et $u^0=id_E$ avec ces notations : $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad M_{\mathscr{B}}(u^n)=\Big(M_{\mathscr{B}}(u)\Big)^n}$$	Remarque : il s'agit d'un cas particulier de la composition On peut le démontrer par récurrence avec pour l'hérédité, $M_{\mathscr{B}}(u^{n+1})=M_{\mathscr{B}}(u^n\circ u)$ donc $M_{\mathscr{B}}(u^{n+1})=M_{\mathscr{B}}(u^n)M_{\mathscr{B}}(u)$ par composition puis par hypothèse de récurrence : $M_{\mathscr{B}}(u^{n+1})=(M_{\mathscr{B}}(u))^n\,M_{\mathscr{B}}(u)=(M_{\mathscr{B}}(u))^{n+1}$

2 Noyau, image et propriétés

2.1 Noyau d'une application linéaire

Définition : le **noyau** d'une application linéaire $u\in\mathscr{L}(E,F)$ est l'ensemble $\boxed{\{x\in E, u(x)=0_F\}}$ que l'on note $\mathrm{Ker}(u)$ Propriété : $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E	Remarque : $\mathrm{Ker}(u)$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène Exemple : avec $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f:(x,y)\mapsto(x-y,-3x+3y)$ $$f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y&=&0\\-3x+3y&=&0\end{cases}$$ $\Leftrightarrow x=y$ donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}((1,1))$
Propriété : $$\boxed{\mathrm{Ker}(u)=\{0\}\Leftrightarrow u \text{ est injective}}$$	« Démonstration » : la linéarité permet d'écrire $u(x)=u(y)\Leftrightarrow u(x-y)=0_F=u(0_E)$ alors $\mathrm{Ker}(u)=\{0\}\Rightarrow x-y=0$ i.e. u injective et si u injective $u(x)=0=u(0)\Rightarrow x=0$

2.2 Image d'une application linéaire

Définition : l'**image** d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est l'ensemble $\boxed{u\langle E\rangle = \{u(x), x \in E\}}$ que l'on note $\mathrm{Im}(u)$ Propriétés : • $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E • $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots u(e_p))}$	Remarque : les colonnes de $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ donnent les coordonnées des vecteurs d'une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ Exemple : avec h définie plus haut $\mathrm{Im}(h) = \left\{(x+y, 5x-y, 2x), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ $= \left\{x(1,5,2) + y(1,-1,0), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ $= \mathrm{Vect}((1,5,2),(1,-1,0))$

2.3 Théorème du rang

Définition : pour $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on appelle **rang** de u la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, noté $\boxed{\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))}$	Remarque : u est surjective $\Leftrightarrow$ $u\langle E\rangle = \mathrm{Im}(u) = F \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim F$
Théorème du rang : soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors : $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E)}$	Exemple : toujours avec $h, \mathrm{rg}(h)) = \dim(h) = 2$ car les 2 vecteurs forment une famille libre donc $\dim(\mathrm{Ker}(h)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \mathrm{rg}(h) = 2-2 = 0$
Définition (rappel) : le **rang** d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. Propriété : le rang d'une matrice M est le rang de n'importe quelle application linéaire représentée par M, en particulier celui de l'application canoniquement associée à M	Exemple : dans la base canonique $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car ses deux colonnes forment une famille libre on retrouve $\mathrm{rg}(h) = 2$

2.4 Caractérisation des isomorphismes

Propriété : soit $u \in \mathscr{L}(E)$ ou $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, les propositions suivantes sont équivalentes • u est un isomorphisme (app. lin. bijective) • u est une application linéaire injective • u est une application linéaire surjective • $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$ (u injective) • $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$ (u est de rang maximal) • la matrice M représentant u dans n'importe quelle base est inversible • le système (carré) homogène $MX = 0$ de matrice M représentant u a pour unique solution le vecteur nul.	Remarques : le théorème du rang nous donne les deux premières équivalences (avec l'égalité des dimensions). u inject. $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 0$ u surjective $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(F) (= \dim(E)$ ici$)$ Exemples : avec $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défine par $f : (x,y) \mapsto (x+2y, 3x+4y)$, on peut utiliser au choix : • $f((x,y)) = (0,0) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = y = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) = (0,0)$ donc f est un isomorphisme • $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,3),(2,4)) = \mathbb{R}^2$ (car famille libre...) donc f est surjective donc ... • de même $\mathrm{rg}(F) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc ... • $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ donc $\det(M(f)) \neq 0$ donc ... • $M(f)X = 0_{2,1} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow X = 0_{2,1}$ donc ...

Exemple d'utilisation du théorème du rang (entre autres car ils sont nombreux) :

si on arrive à montrer que $\text{rg}(A - 6I_3) = 2$ où A est la matrice de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$
alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ donc (théorème du rang), $\dim(\text{Ker}(f - 6id_{\mathbb{R}^3})) = 1$
or $(f - 6id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A - 6I_3)X = 0_{3,1}$ donc 6 est valeur propre et $\dim(E_6(A)) = 1$

3 Changement de bases

Dans ce paragraphe, E un espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$

3.1 Matrices de passages

On commence par un exemple :

$\mathscr{B} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ (base canonique) et $\mathscr{C} = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ sont deux bases de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

on peut écrire $u_1 = e_1 + e_2$ et $u_2 = e_1 - e_2$ et remarquer que $e_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ et $e_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2)$

alors $\quad M(id_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})})_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \quad$ et $\quad M(id_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})})_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

et en faisant le produit de ces deux matrices, on remarque : $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = I_2$

Définition :
soit E un espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots e'_n)$
la **matrice de passage** $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité $x \mapsto x$ entre E muni de la base $\mathscr{B}'$ au départ (attention !) et E muni de la base $\mathscr{B}$ à l'arrivée.
Autrement dit, les colonnes de $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \quad \text{ou} \quad P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{où } \forall j \in [\![1, n]\!], \quad e'_j = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{n,j}e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$$

Propriété :
toutes les matrices de passages sont inversibles et

$$\boxed{P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}}$$

Remarque :
c'est cette propriété, qui nous permet d'affirmer qu'une matrice P est inversible quand elle contient en colonnes une base de vecteurs (propres par exemple). Le caractère base est à justifier au préalable.

3.2 Effet d'un changement de bases sur un vecteur

<table>
<tr>
<td>

Propriété :
si $x \in E$ a pour coordonnées $X_{\mathscr{B}}$ dans $\mathscr{B}$ et de coordonnées $X_{\mathscr{B}'}$ dans $\mathscr{B}'$, alors :

$$X_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} X_{\mathscr{B}'}$$

</td>
<td>

Exemple : avec e_1, e_2, u_1, u_2 vus plus haut

si $X = 3u_1 - 7u_2$ alors $X_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

donc $X_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$

on retrouve $X = 3(e_1 + e_2) - 7(e_1 - e_2)$
$= -4e_1 + 10e_2$

</td>
</tr>
</table>

⚠ si $\mathscr{B}'$ est la « nouvelle base » et $\mathscr{B}$ est l'« ancienne base » ce sont les coordonnées dans l'ancienne base qui s'écrivent directement en fonction des coordonnées dans la nouvelle base avec une matrice de passage naturelle.

3.3 Changement de base d'une application linéaire

<table>
<tr>
<td>

Propriété : si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors :

$$M_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(u) P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$$

</td>
<td>

Remarque : on note la forme $A = PBP^{-1}$
donc si $M_{\mathscr{B}'}(u)$ est diagonale, on aura diagonalisé A (cf. ci-dessous).

</td>
</tr>
</table>

Application à la diagonalisation :

soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
et soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ (ou $\mathscr{L}(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$) dont la matrice dans la base canonique est A

on remarque $AU = -3U$, $AV = 0V$, $AW = 3W$

nous avons donc trouvé 3 vecteurs propres et 3 valeurs propres associées en notant $\mathscr{B}$ la base canonique et $\mathscr{B}' = (U, V, W)$
(ou $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ avec $u = (-1, -3, 3)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 1, 1)$ si on se place dans $\mathbb{R}^3$)

alors $\mathscr{B}'$ est une base car elle est libre, puisque composée d'une concaténation de familles libres de sous-espaces propres distincts et $\text{Card}(\mathscr{B}') = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

donc on peut écrire $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et par ailleurs $M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

car $AU = -3U \Leftrightarrow f(U) = -3U$, $AV = 0 \Leftrightarrow f(V) = 0$, $AW = 3W \Leftrightarrow f(W) = 3W$

donc d'après la propriété précédente $M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$

i.e. $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(-3, 0, 3)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, nous avons donc diagonalisé A

Conclusion : cette analogie avec l'endomorphisme associé nous permet (juste) d'économiser les calculs de AP et PD grâce à la propriété d'inversibilité des matrices de passage.