La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, sans pour autant les panacher.
Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & -7 & 6 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que -1 est valeur propre de A et déterminer $E_{-1}(A)$ le sous-espace propre associé.

2. Montrer que ${}^t(1,2,2)$ est un vecteur propre de A

3. En déduire une deuxième valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

4. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ et justifier que la matrice A est diagonalisable.

5. Sans calcul, montrer que A est inversible.

Exercice 2

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

1. **a.** Calculer $(A-3I)^2$

b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

c. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$

d. A est-elle diagonalisable ?

2. On note $E_\lambda = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X\}$

a. Montrer qu'il existe U_1 et U_2 deux vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on déterminera tels que $E_\lambda = \mathrm{Vect}\,(U_1, U_2)$

b. La famille (U_1, U_2) est-elle une base de E_λ ?

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

   b. Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$

4. **a.** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = 3I + N$

   b. Calculer N^2 et en déduire N^k pour $k \in \mathbb{N}$

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$, on admet que la formule du binôme de Newton, s'applique à $(3I + N)^n$
   Exprimer T^n comme combinaison linéaire de I et de N

   d. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T

5. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$

   b. Vérifier que la formule trouvée à la question précédente reste valable pour $n = -1$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On considère par ailleurs la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = x^2 - 2x + \ln(1+x)$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$
On admettra que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

2. Etude de g

   a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

   b. Calculer $g'(x)$ pour $x \geqslant 0$ et déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+$

   c. En déduire que g s'annule une et une seule fois sur $]0, +\infty[$ en un réel α puis vérifier que $1 < \alpha < 2$

3. Quelques propriétés sur f

   a. Montrer que, pour $x > 0, f(x) = x \iff g(x) = 0$

   b. Déterminer une fonction h de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} \times h(x)$$

   c. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x^2$

   d. Donner le tableau des variations de f. Préciser sa limite en $+\infty$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

   c. En déduire la limite de la suite u

   d. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n - \alpha)$?

5. Informatique, avec Python,

   a. définir la fonction f et la représenter sur un intervalle de votre choix ainsi que la droite $y = x$

   b. écrire une fonction récursive d'en-tête `u(n)` permettant le calcul de u_n

c. compléter la fonction suivante d'en-tête `approx(epsilon)` permettant de déterminer un entier n à partir duquel $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.

```
def approx(epsilon):
    n=0
    u=1
    while ...
        u=...
        n...
    return n
```

Exercice 4

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1; N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaitre la loi de X_k

2. Le programme en langage Python ci–dessous définit une fonction « `ajout` » qui prend en argument une liste `L` et un entier `x`

```
def ajout(L,x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste `L`

3. Recopier et compléter la fonction Python « `Simul_T` » ci–dessous.
Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1; N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :

- `L` la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
- `k` le rang du tirage en cours ;
- `x` le résultat du tirage en cours.

```
def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = ...
    return(...)
```

4. On suppose $N = 3$
Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`
Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2

6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.

- **a.** Décrire l'événement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des événements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbb{N}^*$
- **b.** En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$
- **c.** Montrer que $P(T_2 = k) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$

7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.

8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$
Reconnaitre une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N

Pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le $T_{i-1}{}^{\text{ème}}$ tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variable aléatoires $Z_1, \dots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2; N]\!]$

- **a.** Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-i+1}{N}$
- **b.** Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$

10. Soit $i \in [\![1; N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \dots, Z_i$

Loi de T_3

11.

- **a.** Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$
- **b.** En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) \quad = \quad \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^n - \frac{2}{N^n} \right)$$

- **c.** Déterminer la loi de T_3

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1; N]\!]$, montrer que $E(T_i) \; = N \displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$, montrer que

$$\text{cov}(T_i, T_j) \quad = \quad V(T_i)$$

où $\text{cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j