ECG 2 - Mathématiques appliquées **Mathématiques** **DS n°2** - 15 novembre 2025

Corrigé *Total sur 80 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points*

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 *10 points*

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & -7 & 6 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que -1 est valeur propre de A et déterminer $E_{-1}(A)$ le sous-espace propre associé. *3 points*

On va résoudre le système $AX = -X \Leftrightarrow A + I_3)X = 0_{3,1}(\mathbb{R})$ où $X = {}^t(x \quad y \quad z) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \Leftrightarrow x - y + z = 0 \Leftrightarrow x = y - z$$

donc $\boxed{-1 \text{ est valeur propre}}$ car il existe des solutions non nulles ($\neq 0_{3,1}$) à $AX = X$

$$\text{et } E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ donc } \boxed{E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

2. Montrer que ${}^t(1,2,2)$ est un vecteur propre de A *0,5 point*

$$A^t(1,2,2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & -7 & 6 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6+6 \\ 6-14+12 \\ 6-12+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^t(1,2,2)$$

donc $\boxed{{}^t(1,2,2) \text{ est un vecteur propre}}$ (car il est non nul).

3. En déduire une deuxième valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé. *2 points*

Comme vu à la question **2.**, $A^t(1,2,2) = 2^t(1,2,2)$ donc 2 est une valeur propre de A (car le vecteur est non nul), donc $\dim E_2(A) \geqslant 1$
par ailleurs, $\dim E_{-1}(A) = 2$ car c'est un espace engendré par deux vecteurs non proportionnels qui en forment donc une base.
donc $\dim E_2(A) \leqslant 1$ car $\dim E_{-1}(A) + \dim E_2(A) \leqslant 3$
finalement $\text{Vect}({}^t(1,2,2)) \subset E_2(A)$ et $\dim E_2(A) = \dim(\text{Vect}({}^t(1,2,2))) = 1$ donc $\boxed{E_2(A) = \text{Vect}({}^t(1,2,2))}$

4. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ et justifier que la matrice A est diagonalisable. *3 points*

On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors

$AP = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & -7 & 6 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

donc $AP = PD$

de plus $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (car composée d'un vecteur non nul), ainsi que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ comme évoqué plus haut (car composée de deux vecteurs non proportionnels)

donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre car il s'agit d'une concaténation de familles libres de sous-espaces propres distincts, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est composée de 3 éléments, ce qui est égal à la dimension de l'espace.

donc la matrice P composée de ces vecteurs est inversible, alors $AP = PD \Rightarrow APP^{-1} = PDP^{-1}$ i.e. $\boxed{A = PDP^{-1}}$

donc par définition, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$ (car semblable à une matrice diagonale)

5. Sans calcul, montrer que A est inversible. *1,5 points*

A n'est pas inversible $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre de A

donc A est inversible $\Leftrightarrow$ 0 n'est pas valeur propre de A

or ici 0 n'est pas valeur propre de A (sinon il y aurait un sous-espace propre supplémentaire de dimension au moins 1, ce qui n'est pas possible car la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à 3) donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

Exercice 2 *19 points*

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

1. **a.** Calculer $(A - 3I)^2$ *1 point*

$$(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4-8 & 2+2-4 & -4-4+8 \\ 8+8-16 & 4+4-8 & -8-8+16 \\ 8+8-16 & 4+4-8 & -8-8+16 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}$$

b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} *1 point*

On développe la relation précédente $(A-3I)^2 = A^2 + A(-3I) - 3IA + (-3I)^2 = A^2 - 6A + 9I = 0_3$

donc $9I = 6A - A^2 = A(6I - A)$ puis $A\left(\frac{1}{9}(6I - A)\right) = I$

donc $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{9}(6I - A)}$

c. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ *2 points*

d'après **1.a.**, on sait que $(x-3)^2$ est un polynôme annulateur de A et la seule racine de ce polynôme est 3, donc 3 est la seule valeur propre possible, i.e.$\mathrm{Sp}(A) \subset \{3\}$
Montrons que 3 est réellement valeur propre
Option A : on réduit la matrice $A - 3I$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec les opérations } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

donc $A - 3I$ n'est pas inversible car elle a été réduite en une matrice triangulaire dont plusieurs coefficients diagonaux sont nuls, donc 3 est valeurs propre de A et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{3\}}$

Option B (l'idée) : par l'absurde, si $A - 3I$ est inversible alors $(A - 3I)^2 = 0_3 \Rightarrow A - 3I = 0_3$ (en multipliant par $(A - 3I)^{-1}$) ce qui est faux d'où la contradiction

d. A est-elle diagonalisable ? *1 point*

Par l'absurde : si A est diagonalisable, alors A peut s'écrire $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et contient les valeurs propres sur la diagonale, en l'occurrence la valeur propre qui est 3, donc $D = \mathrm{Diag}(3, 3, 3) = 3I$ alors $A = P(3I)P^{-1} = 3PIP^{-1} = 3PP^{-1} = 3I$ ce qui est faux, d'où la contradiction avec l'hypothèse de départ, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

2. On note $E_\lambda = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X\}$

a. Montrer qu'il existe U_1 et U_2 deux vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on déterminera tels que $E_\lambda = \mathrm{Vect}\,(U_1, U_2)$

Soit $X = {}^t(x \quad y \quad z) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors $AX = 3X \Leftrightarrow (A - 3I)X = 0$ *2 points*

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2z - 2x \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 2z - 2x \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } E_3(A) = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \boxed{\mathrm{Vect}\,(U_1, U_2)} \text{ où } U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. La famille (U_1, U_2) est-elle une base de E_λ ? *0,5 point*

Oui, car d'une part elle est génératrice de $E_3(A)$ par définition du Vect, d'autre part elle est libre car U_1 et U_2 ne sont pas proportionnels, $\boxed{\text{c'est donc une base de } E_3(A)}$

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse. *2 points*

On inverse la matrice P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

au stade où P, a été réduite en une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls, on peut affirmer que P est inversible et enfin avec $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, on trouve $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

b. Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *1,5 points*

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4-8 & 1-1-4 & -2-4+14 \\ 1-4+4 & -1+1+2 & 2+4-7 \\ -2+4-8 & 2-1-4 & -4-4+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+8 & -8+8 & 5-4 \\ 1-1 & 4-1 & -1+2 \\ -6+6 & -6+6 & 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d'où l'égalité $\boxed{P^{-1}AP = T}$

c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$ *1,5 points*

Par récurrence ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : P^{-1}A^nP = T^n$

<u>Initialisation</u> : $P(0$ est vrai $\Leftrightarrow P^{-1}A^0P = T^0 \Leftrightarrow P^{-1}IP = I \Leftrightarrow P^{-1}P = I$
ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ soit vérifiée
alors par hypothèse, $P^{-1}A^nP = T^n$ donc $T^{n+1} = TT^n = P^{-1}APP^{-1}A^nP = P^{-1}AA^nP = P^{-1}A^{n+1}P$
i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $\boxed{P^{-1}A^nP = T^n}$

4. **a.** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = 3I + N$ *0,5 point*

La matrice cherchée est $\boxed{N = T - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

b. Calculer N^2 et en déduire N^k pour $k \in \mathbb{N}$ *1 point*

On montre que $\boxed{N^2 = 0_3}$ alors $\boxed{\forall k \geqslant 2, N^k} = N^{k-2}N^2 = N^{k-2}0_3 \boxed{= 0_3}$ (attention N^{k-2} n'a de sens que pour $k \geqslant 2$) et $\boxed{\text{pour } k=0, N^k = I}$ et pour $\boxed{k=1, N^k=N}$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$, on admet que la formule du binôme de Newton, s'applique à $(3I+N)^n$
Exprimer T^n comme combinaison linéaire de I et de N *2 points*

Par définition $T = N + 3I$, donc en appliquant la formule du binôme de Newton (valable en fait ici car N et $3I$ commutent) :

$T^n = (N+3I)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I)^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (3I)^{n-k} N^k$ car $N^k = 0_2$ pour $k \geqslant 2$

donc $T^n = \dbinom{n}{0}(3I)^n N^0 + \dbinom{n}{1}(3I)^{n-1}N^1$ donc $\boxed{T^n = 3^n I + n3^{n-1} N}$

d. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T *0,5 point*

Comme $N = T - 3I$, la formule précédente donne :

$T^n = 3^n I + n3^{n-1}N = 3^n I + n3^{n-1}(T-3I) = 3^n I + n3^{n-1}T - n3^n I \boxed{= 3^n(1-n)I + n3^{n-1}T}$

5. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$ *1,5 points*

Grâce à l'égalité $P^{-1}A^nP = T^n$ (**3.c.**), on passe d'une relation sur T^n (question précédente) à une relation sur A^n en multipliant par P et P^{-1} sur les côtés :

$A^n = PT^nP^{-1} = P\left(3^n(1-n)I + n3^{n-1}T\right)P^{-1} = \left(3^n(1-n)P + n3^{n-1}PT\right)P^{-1}$

$= 3^n(1-n)PP^{-1} + n3^{n-1}PTP^{-1}$ donc $\boxed{A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I}$

car $P^{-1}AP = T \Rightarrow AP = PT \Rightarrow A = PTP^{-1}$

b. Vérifier que la formule trouvée à la question précédente reste valable pour $n = -1$ *1 point*

Pour $n = -1$, la formule ci-dessus donnerait $A^{-1} = -3^{-2}A + 2 \times 3^{-1} I = -\dfrac{1}{9}A + \dfrac{2}{3}I = \dfrac{1}{9}(6I - A)$
ce qui est bien vrai d'après la question (**1.b.**)

Exercice 3 *24 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On considère par ailleurs la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = x^2 - 2x + \ln(1+x)$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ *1,5 points*
On admettra que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

$x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}+^*$ par composition de fonctions $\mathscr{C}^1$, donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ en tant qu'opérations et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$

De plus, en 0 : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc par définition $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

de fait $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en 0 et donc sur } \mathbb{R}_+}$ (car $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ implique continue)

2. Etude de g

a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ *1 point*

$\forall x \geqslant 0, x+1 \geqslant 1$ donc $\ln(x+1) \geqslant \ln(1) = 0$ par croissance de ln
donc $\forall x \geqslant 0, g(x) \geqslant x^2 - x$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 - x = \lim_{x\to+\infty} x(x-2) = +\infty$ par produit

donc par comparaison (théorème des gendarmes version infinie) $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

Nota bene : on peut aussi faire une addition de limites avec celle de $x(x-2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$ par composition

b. Calculer $g'(x)$ pour $x \geqslant 0$ et déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ *2 points*

$\forall x \geqslant 0, \quad g'(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{(2x-2)(1+x)+1}{1+x} = \dfrac{2x+2x^2-2-2x+1}{x+1} = \dfrac{2x^2-1}{x+1}$

donc, puisque $x \geqslant 0, g'(x)$ est du signe de $2x^2-1$

or $2x^2-1 = (\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)$ est un polynôme du second degré, avec $a > 0$, donc les racines sont $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on en déduit le tableau des variations de g (en posant $m = g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, et avec $g(0) = 0-0+0 = 0$ et la limite précédente)

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x))$		-	0	+	
g	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

c. En déduire que g s'annule une et une seule fois sur $]0, +\infty[$ en un réel α puis vérifier que $1 < \alpha < 2$

On peut préciser que g est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ *3 points*

et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ puisque g' ne s'annule pas en dehors de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

donc $\forall x \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right], g(x) < g(0)$ i.e. $g(x) < 0$ et donc g ne s'annule pas sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, g est strictement croissante et continue, donc g induit une bijection de $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ sur $[m, +\infty[$ et comme nous venons de le voir $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = m < 0$ donc $0 \in [m, +\infty[$

de fait, 0 admet un unique antécédent par g, i.e. g s'annule une et une seule fois sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ et donc, puisque g ne s'annule pas sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\boxed{g \text{ s'annule une et une seule fois sur }]0, +\infty[\text{ en un réel } \alpha}$

de plus $g(1) = 1 - 2 + \ln(2) = -1 + \ln(2) < 0$ car $2 < e \Rightarrow \ln(2) < \ln(e) = 1$ et $g(2) = \ln(3) > 0$ donc, g étant toujours continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x \in [1, 2], g(x) = 0$ et même $x \in]1, 2[$ car $g(1) \neq 0$ et $g(2) \neq 0$

or α est l'unique solution de cette équation sur $\mathbb{R}_+$ donc $\boxed{1 < \alpha < 2}$

3. Quelques propriétés sur f

a. Montrer que, pour $x > 0, f(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = 0$ *0,5 point*

Par définition de $f, f(x) = x \Leftrightarrow 2 - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = x \Leftrightarrow 2x - \ln(1+x) = x^2$ (car $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ par définition de g d'où $\boxed{f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0}$

b. Déterminer une fonction h de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \times h(x)$ *1 point*

$\forall x \geqslant 0, f'(x) = 0 - \dfrac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \times \left(\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{1}{x^2} h(x)$

où $\boxed{h(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1} \text{ et } h \text{ est bien } \mathscr{C}^1}$ (comme f, en tant qu'opérations et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$)

c. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x^2$ *2,5 points*

Dans un premier temps, on étudie les variations de h :
$\forall x \geqslant 0, \quad h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(x+1)^2} \geqslant 0$ donc h est croissante sur $\mathbb{R}_+$
Comme $h(0) = \ln(1) - 0 = 0$, on obtient $h(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$
ensuite, on peut étudier les variations de $\varphi : x \mapsto h(x) - \dfrac{1}{2}x^2$:
$\forall x \geqslant 0, \quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} - x = \dfrac{1+x-1-x(1+x^2)}{(1+x)^2} = x \times \dfrac{1-(1+x)^2}{(1+x)^2}$
donc $\varphi'(x)$ est du signe de $1-(1+x)^2$ car $x \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$
or $x \geqslant 0 \Rightarrow 1+x \geqslant 1 \Rightarrow (1+x)^2 \geqslant 1$ par croissance de la fonction carré et donc $\forall x \geqslant 0, \varphi'(x) \leqslant 0$
donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\varphi(0) = 0$, on obtient $\forall x \geqslant 0, \varphi(x) \leqslant 0$ i.e. $h(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x^2$

d'où finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x^2}$

d. Donner le tableau des variations de f. Préciser sa limite en $+\infty$ *2 points*

D'après la question **3.b.**, sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $h(x)$ donc $f'(x) \geqslant 0$ d'après la question précédente donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ par continuité
de plus $\forall x > 0, \ln(1+x) = \ln\left[x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right] = \ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$
or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \ln(1+0) = 0$ par opérations et continuité de $\ln$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1$ i.e. $\ln(1+x) \sim \ln(x)$ en $+\infty$
donc, en $+\infty$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \sim \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées,
d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$
et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 2$ i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
d'où le tableau de variations (par définition, $f(0) = 1$)

x	0	$+\infty$
f	1 ↗	2

4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ *1 point*

En admettant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bien définie (on fait confiance à l'énoncé), $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(u_{n-1})$
donc $u_n > 0$ d'après l'étude de f et par ailleurs, $u_0 = 1 > 0$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ *3 points*

Il s'agit d'une question-type où l'on exploite l'inégalité des accroissements finis, mais pour pouvoir l'utiliser, il faut d'abord majorer $|f'|$ (par $\dfrac{1}{2}$ comme nous le fait deviner l'énoncé)
or d'après les questions **3.b.**,**3.c.** et **3.d.** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{1}{x^2}h(x) \geqslant 0$ et $h(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$
donc $\dfrac{1}{x^2}h(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x^2}{2}$ (car $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$) i.e. $|f'(x)| = f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
alors d'après l'inégalité des accroissements finis (avec $a = \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $b = u_n \in \mathbb{R}_+^*$),
$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant |u_n - \alpha|$
or $f(u_n) = u_{n+1}$ et par définition $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ (d'après **3.a.**) donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|$

on va alors montrer la deuxième inégalité par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vrai $\Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leqslant 1$ ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie
car $u_0 = 1$ et $1 < \alpha < 2$ donc $0 < \alpha - 1 < 1$ i.e. $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 < 1$

<u>Hérédité</u> : supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ soit vérifiée

alors par hypothèse, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ donc $\dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$
or, comme nous venons de le démontrer, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|$
donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $\boxed{|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}}$

c. En déduire la limite de la suite u *1 point*

$\dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ (forme q^n avec $|q| = \dfrac{1}{2} < 1$) et d'après la question précédente $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$
donc d'après le théorème des gendarmes, $|u_n - \alpha| \to 0$ et donc $\boxed{u_n \to \alpha}$

d. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0}(u_n - \alpha)$? *1 point*

D'après **3.b.** $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ or $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^n}$ converge (forme $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ avec $\dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$)
donc d'après le théorème de comparaisons sur les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n - \alpha|$ converge

i.e. $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n - \alpha) \text{ est absolument convergente et donc convergente}}$ par propriété.

5. Informatique, avec Python,

a. définir la fonction f et la représenter sur un intervalle de votre choix ainsi que la droite $y = x$
1,5 pts

Pour gérer la double définition de f (en 0 et ailleurs) on créé la liste des ordonnées avec une boucle `for`. On représente ensuite la fonction sur l'intervalle $[0, 10]$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
  if x==0 :
    return 1
  else:
    return 2-np.log(1+x)/x
x=np.linspace(0,10,100)
y=[f(a) for a in x]
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,x)
plt.show()
```

b. écrire une fonction récursive d'en-tête `u(n)` permettant le calcul de u_n *1 point*

On peut définir une fonction récursive (ou avec une boucle `for`) :

```python
def u(n):
  if n==0 :
    return 1
  else:
    return f(u(n-1))
```

c. compléter la fonction suivante d'en-tête `approx(epsilon)` permettant de déterminer un entier n à partir duquel $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ *1,5 points*

Grâce à l'inégalité de la question **4.b.**, dès lors que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$ on a $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$
Ce programme n'utilise pas la fonction précédente, on aurait pu simplement faire « avancer » n avec la même conclusion et conclure avec `u(n)`

```python
def approx(epsilon):
    n=0
    u=1
    while 1/2**n>epsilon :
        u=f(u)
        n=n+1
    return n
```

Exercice 4 - EMLyon 2024 *24 points*

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1;N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaitre la loi de X_k *0,5 point*

Les boules numérotées de 1 à N ont chacune la même chance d'être tirée, donc la variable aléatoire $\boxed{X_k \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1;N]\!]}$

2. Le programme en langage Python ci–dessous définit une fonction « `ajout` » qui prend en argument une liste `L` et un entier `x` *1 point*

```
def ajout(L,x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste `L`

Si la liste `L` contient déjà `x`, alors l'exécution de la commande `ajout(L,x)` ne modifie pas `L`. Si la liste `L` ne contient pas `x`, alors l'exécution de la commande `ajout(L,x)` ajoute une nouvelle composante égale à `x` à la fin de `L`

3. Recopier et compléter la fonction Python « `Simul_T` » ci–dessous. *1,5 points*
Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1;N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :

- `L` la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
- `k` le rang du tirage en cours ;
- `x` le résultat du tirage en cours.

```
def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while len(L)<i :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = k + 1
    return k
```

On effectue avec la boucle `while`, des tirages tant que nous n'avons pas obtenu i numéros distincts. Comme on ajoute progressivement les nouveaux numéros dans `L`, on continue « tant que » la longueur de `L` est strictement plus petite que i. On incrémente à chaque fois k le compteur de tirages.

4. On suppose $N = 3$ *1,5 points*
Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`
Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

```
S = 0
for i in range(100):
    S = S + Simul_T(3,2)
print(S/100)
```

En effectuant un grand nombre de réalisations, et en calculant la moyenne des résultats obtenus pour T_2 (avec $N = 3$), le nombre affiché sera une $\boxed{\text{approximation de l'espérance } E(T_2)}$.

Partie B : étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2 *0,5 point*

$\boxed{T_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}$ car on ne peut obtenir deux numéros distincts qu'en au moins deux tirages et toutes les valeurs suivantes sont théoriquement possibles.

6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.

a. Décrire l'événement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des événements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbb{N}^*$ *1 pt*

Si $(X_1 = 1)$ alors la première boule tirée porte le numéro 1, et si $T_2 = k$ alors les $k-1$ premières boules tirées portent toutes le même numéro, ainsi :

$$\boxed{(T_2 = k) \cap (X_1 = 1) \;=\; \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_j = 1)\right) \cap (X_k \neq 1)} = (X_1 = 1) \cap \ldots \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k \neq 1)$$

b. En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$ *1 point*

Les tirages s'effectuant avec remise, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, d'où $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) = P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_j = 1)\right) \cap (X_k \neq 1)\right)$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} P(X_j = k)\right) \times P(X_k \neq 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3^k}}$$

$$(= P(X_1 = 1) \times \ldots \times P(X_{k-1} = 1) \times P(X_k \neq 1))$$

c. Montrer que $P(T_2 = k) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$ *1,5 points*

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{(X_1 = 1), (X_1 = 2), (X_1 = 3)\}$:

$P(T_2 = k) = P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) + P((T_2 = k) \cap (X_1 = 2)) + P((T_2 = k) \cap (X_1 = 3))$

Or, les trois probabilités de cette somme sont égales puisque les numéros 1, 2 et 3 jouent des rôles symétriques. Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve :

$$P(T_2 = k) = 3 \times P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) = 3 \times \frac{2}{3^k} = \boxed{\frac{2}{3^{k-1}}}$$

7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer. *2 points*

La variable aléatoire T_2 admet une espérance si la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} kP(T_2 = k)$ converge (absolument)

or $\sum\limits_{k \geqslant 2} kP(T_2 = k) = \sum\limits_{k \geqslant 2} k \dfrac{2}{3^{k-1}} = 2 \sum\limits_{k \geqslant 2} k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$

La série géométrique dérivée $\sum\limits_{k \geqslant 1} k \dfrac{1}{3^{k-1}}$ est convergente car $\dfrac{1}{3} \in]-1;1[$, et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \dfrac{1}{3^{k-1}} = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \dfrac{9}{4}$

donc $\sum\limits_{k \geqslant 2} k \dfrac{1}{3^{k-1}}$ est convergente et $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k \dfrac{1}{3^{k-1}} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \dfrac{1}{3^{k-1}} - 1 = \dfrac{9}{4} - 1 = \dfrac{5}{4}$

donc T_2 admet une espérance et $E(T_2) = 2 \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k \dfrac{1}{3^{k-1}} = 2 \times \dfrac{5}{4}$ donc $\boxed{E(T_2) = \dfrac{5}{2}}$

8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$ *2 points*
Reconnaitre une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Par définition et comme $T_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la variable aléatoire Z_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P(Z_2 = k) = P(T_2 - 1 = k) = P(T_2 = k+1) = \dfrac{2}{3^k} = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z_2 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p = \frac{2}{3} : Z_2 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{2}{3}\right)}$$

ainsi Z_2 admet une espérance et une variance données par $E(Z_2) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{3}{2}$ et $V(Z_2) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{3}{4}$. On en déduit que $T_2 = Z_2 + 1$ admet aussi une espérance et une variance, on trouve :

par linéarité de l'espérance $E(T_2) = E(Z_2+1) = E(Z_2)+1 = \dfrac{3}{2}+1$ donc on retrouve $\boxed{E(T_2) = \dfrac{5}{2}}$

par propriété sur la variance $V(T_2) = V(Z_2+1) = V(Z_2)$ donc $\boxed{V(T_2) = \dfrac{3}{4}}$

Partie C : quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N

Pour tout $i \in [\![1;N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par : $\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le ${T_{i-1}}^{\text{ème}}$ tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i-1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variable aléatoires $Z_1, \ldots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2;N]\!]$

a. Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-i+1}{N}$ *1 point*

A partir du ${T_{i-1}}^{\text{ème}}$ tirage, on considère que chaque tirage est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir l'un des $N-(i-1)$ numéros qui ne sont pas déjà sortis ». La variable aléatoire Z_i donne alors le rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $\dfrac{N-i+1}{N}$, par conséquent $\boxed{Z_i \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{N-i+1}{N}\right)}$

b. Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i=1$ *1 pt*

Par propriété sur la loi géométrique, on a :

$\boxed{E(Z_i) = \dfrac{N}{N-i+1}}$ et $V(Z_i) = \dfrac{i-1}{N} \times \left(\dfrac{N}{N-i+1}\right)^2 = \boxed{\dfrac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}}$

Sachant que $Z_1 = 1$ de manière certaine, on a $E(Z_1) = 1$ et $V(Z_1) = 0$, ce qui correspond aux résultats des formules ci-dessus en prenant $i = 1$

10. Soit $i \in [\![1;N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \ldots, Z_i$ *1 point*

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k = Z_1 + \sum_{k=2}^{i} Z_k = T_1 + \sum_{k=2}^{i} T_k - T_{k-1}$ (car $Z_1 = T_1$)

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k = T_1 + (T_i - T_1)$ par télescopage donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k = T_i}$

Loi de T_3

11. a. Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$ *1 point*

Soient $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$ deux entiers, par indépendance de Z_2 et Z_3 et d'après les lois de Z_2 et Z_3 trouvées précédemment, on a : $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k)) = P(Z_2 = \ell) \times P(Z_3 = k)$

donc $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k)) = \left(\dfrac{1}{N}\right)^{\ell-1} \times \dfrac{N-1}{N} \times \left(\dfrac{2}{N}\right)^{k-1} \times \dfrac{N-2}{N} = \boxed{2^{k-1}\dfrac{(N-1)(N-2)}{N^{\ell+k}}}$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad P(Z_2 + Z_3 = n) = \dfrac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\dfrac{2}{N}\right)^n - \dfrac{2}{N^n}\right)$ *2,5 pts*

Soit $n \geqslant 2$, on décompose $(Z_2 + Z_3 = n)$ en une union d'événements incompatibles (Z_2 peut varier de 1 à $n-1$ et Z_3 vaut le complément à n) : $(Z_2 + Z_3 = n) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} (Z_2 = n-k) \cap (Z_3 = k)$

Il s'ensuit : $P(Z_2 + Z_3 = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P((Z_2 = n-k) \cap (Z_3 = k)) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \frac{(N-1)(N-2)}{N^n}$ (d'après la question précédente)

donc $P(Z_2 + Z_3 = n) = \dfrac{(N-1)(N-2)}{N^n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{\ell=0}^{n-2} 2^{\ell}$ avec le changement d'indice $\ell = k-1$

donc $P(Z_2 + Z_3 = n) = \dfrac{(N-1)(N-2)}{N^n} \times \dfrac{1-2^{n-1}}{1-2} = \dfrac{(N-1)(N-2)}{N^n}\left(2^{n-1} - 1\right)$

donc $\boxed{P(Z_2 + Z_3 = n) = \dfrac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\dfrac{2}{N}\right)^n - \dfrac{2}{N^n}\right)}$

c. Déterminer la loi de T_3 *1 point*

La variable aléatoire T_3 est à valeurs dans $[\![3; +\infty[\![$, et pour $n \geqslant 3$, d'après la question **10.** :
$P(T_3 = n) = P(Z_1 + Z_2 + Z_3 = n) = P(Z_2 + Z_3 = n-1)$

donc d'après la question précédente $\boxed{P(T_3 = n) = \dfrac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\dfrac{2}{N}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{N^{n-1}}\right)}$

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1; N]\!]$, montrer que $E(T_i) = N \displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$ *1,5 points*

D'après la question **10.** $E(T_i) = E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k\right)$ puis $E(T_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} E(Z_k)$ par linéarité de l'espérance

donc $E(T_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \frac{N}{N-k+1}$ d'après la question **9.b.**

donc $E(T_i) = N \displaystyle\sum_{j=N-i+1}^{N} \frac{1}{j}$ avec le changement d'indice $j = N-k+1$

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$, montrer que $\operatorname{cov}(T_i, T_j) = V(T_i)$ *2,5 points*
où $\operatorname{cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j

Si $j = i$, on a $\operatorname{cov}(T_i, T_j) = \operatorname{cov}(T_i, T_i) = V(T_i)$

Si $j > i$, d'après la relation de Chasles, on trouve : $T_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} Z_k = \sum_{k=1}^{i} Z_k + \sum_{k=i+1}^{j} Z_k = T_i + \sum_{k=i+1}^{j} Z_k$

Puis, en appliquant la linéarité à droite :

$$\operatorname{cov}(T_i, T_j) = \operatorname{cov}\left(T_i, T_i + \sum_{k=i+1}^{j} Z_k\right) = \operatorname{cov}(T_i, T_i) + \operatorname{cov}\left(T_i, \sum_{k=i+1}^{j} Z_k\right) = \operatorname{cov}(T_i, T_i) + \sum_{k=i+1}^{j} \operatorname{cov}(T_i, Z_k)$$

d'après le lemme des coalitions, la variable aléatoire $T_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k$ est indépendante des variables aléatoires $Z_{i+1}, \dots Z_n$. Ainsi $\operatorname{cov}(T_i, Z_j) = 0$ pour tout $j \in [\![i+1; N]\!]$, d'où $\boxed{\operatorname{cov}(T_i, T_j) = \operatorname{cov}(T_i, T_i) = V(T_i)}$