ECG 2 - maths appli. **Devoir en temps libre n°4 bis** Pour s'entrainer

Sujet zéro Ecricome (en vue du concours 2023) **Eléments de corrigé**

Partie I

1. La matrice $A-6I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ est de $\boxed{\text{rang } 2}$ puisque ses trois colonnes C_1, C_2 et C_3 vérifient $C_1 + C_2 = 0$ avec (C_1, C_3) non colinéaires.

Ainsi, la matrice $A-6I_3$ n'est pas inversible, ce qui signifie que $\boxed{6 \text{ est une valeur propre de } A.}$

De plus, comme $\text{rg}(A - 6I_3) = 2$, on en déduit par le théorème du rang que l'espace propre associé à la valeur propre 6 est de dimension $\dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) - \text{rg}(A - 6I_3) = 3 - 2$. D'où $\boxed{\dim(E_6(A)) = 1}$

2. $U = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$AU = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ainsi U étant un vecteur non nul vérifiant $AU = 2U$

$\boxed{U \text{ est donc bien un vecteur propre de } A\text{, et la valeur propre associée est } 2}$

NB : *il est attendu des candidats qu'ils mentionnent $U \neq 0$ pour vérifier la bonne connaissance de la définition d'un vecteur propre.*

3. **a.** Montrons que $\mathscr{B} = (U, V, W)$ est une base de $\mathscr{M}3, 1(\mathbb{R})$

Comme $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il suffit de vérifier que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

Soient a, b et c trois réels tels que : $aU + bV + cW = 0$

Par identification des coefficients , on a : $\begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow a = b = c = 0$

Ainsi $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} \text{ est bien une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

NB : *Les candidats doivent bien maitriser le vocabulaire. En particulier, le cardinal et la dimension ne doivent pas être confondus.*

b. $f(U) = AU = 2U$ puisque U est un vecteur propre associé à la valeur propre 2

$f(V) = AV = U + 2V$ d'après la définition de U

$$f(W)=AW=\begin{pmatrix}5&1&-4\\3&3&-4\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=6W$$

Donc $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est : } B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}}$

c. En notant $P=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$,

alors par propriétés, P est inversible et, $M_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}(f)=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}M_{\mathscr{B}'}(f)P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$ i.e. $\boxed{A=PBP^{-1}}$

Variante : on calcule AP et PB et on vérifie l'égalité, ce qui entraine (P inversible comme c'est une matrice de passage), $A=PBP^{-1}$

4. La matrice B est inversible (triangulaire à coefficients diagonaux non nuls) donc par caractérisation $f\in\mathscr{L}(E)$ est un isomorphisme donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ (matrice de f dans n'importe quelle base est alors inversible).

La suite n'est pas officiellement au programme : la matrice $B-2I_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ est clairement de rang 2, donc l'espace propre de B (donc de A *) pour la valeur propre 2 est de dimension 1

Ainsi $Sp(A)=\{2,6\}$, mais $\dim(E_2(A))+\dim(E_6(A))=2$. Si A était diagonalisable, il existerait une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres. Or la plus grande famille libre de vecteurs propres que l'on puisse construire est de cardinal 2, d'après ce qui précéde et $\mathscr{M}_{3,1}(R)$ est de dimension 3. Donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Remarque * : pour montrer que les matrices semblables ont même valeurs propres, on peut passer par les endomorphismes (pour la dimension des sous-espaces propres, c'est légèrement plus compliqué) :
$B-2I_3$ n'est pas inversible or $M_{\mathscr{B}'}(f-2id)=M_{\mathscr{B}'}(f)-2M_{\mathscr{B}'}(id)=B-2I_3$
donc par caractérisation $f-2id$ n'est pas un isomorphisme, donc $M_{\mathscr{B}}(f-2id)=A-2I_3$ n'est pas inversible donc 2 est valeurs propre de A

Partie II

5. On peut remarquer que dans les cas où $x(0)=y(0)$, on conjecture que : $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ x(t)=y(t)}$

6. En effectuant le produit matriciel, on a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ AX(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x(t)+y(t)-4z(t) \\ 3x(t)+3y(t)-4z(t) \\ x(t)-y(t)+2z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \boxed{X'(t)}$$

7. $\forall t \in \mathbb{R},\ \boxed{Y'(t)} = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}PBP^{-1}X(t) = BP^{-1}X(t) = \boxed{BY(t)}$

8. **a.** L'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ a pour ensemble de solutions : $\boxed{\mathscr{S}_1 = \{t \mapsto ae^{6t},\ a \in \mathbb{R}\}.}$

b. L'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$ a pour ensemble de solutions : $\boxed{\mathscr{S}_2 = \{t \mapsto be^{2t},\ b \in \mathbb{R}\}.}$

c. Soit c un réel. Notons $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = cte^{2t}$. La fonction ψ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t} = 2\psi(t) + ce^{2t}$.
Ainsi ψ vérifie l'équation différentielle $(\mathcal{E}_3)$.
Comme les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}_3)$ sont les solutions de $(\mathcal{E}_2)$, on en déduit que

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (\mathcal{E}_3) \text{ est : } \mathscr{S}_3 = \{t \mapsto de^{2t} + cte^{2t},\ d \in \mathbb{R}\}}$$

9. On a montré dans la question **7.** que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = BY(t)$.

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ et donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha'(t) = 2\alpha(t) + \beta(t) \\ \beta'(t) = 2\beta(t) \\ \gamma'(t) = 6\gamma(t) \end{cases}$

Ainsi, γ est bien solution de $(\mathcal{E}_1)$: on peut dire qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que
$\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) = ae^{6t}$ d'après la question **8.a.**,
β est bien solution de $(\mathcal{E}_2)$: on peut dire qu'il existe un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que
$\forall t \in \mathbb{R},\ \beta(t) = be^{2t}$ d'après la question **8.b.**
Et on obtient : $\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha'(t) = 2\alpha(t) + be^{2t}$
Alors α est solution de $(\mathcal{E}_3)$ pour $c = b$ en se rapportant à la question **8.c.**.
On peut donc dire qu'il existe un $d \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) = de^{2t} + bte^{2t} = (bt+d)e^{2t}$
Finalement, il existe trois réels a, b et d tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} (bt+d)e^{2t} \\ be^{2t} \\ ae^{6t} \end{pmatrix}$$

NB : *Cette question sera bien rémunérée dans le barème, à condition qu'elle soit bien rédigée et que les appels aux questions précédentes soient bien établis.*

10. Comme pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on en déduit par équivalence que :
$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = PY(t)$

Donc pour tout t réel, $X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (bt+d)e^{2t} \\ be^{2t} \\ ae^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(bt+b+c)e^{2t} + ae^{6t} \\ 2(bt+d)e^{2t} + ae^{6t} \\ (2(bt+d)+b)e^{2t} \end{pmatrix}$

En prenant $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = d$ et $\lambda_3 = a$, on a bien le résultat voulu.

11. Avec les notations précédentes, on a : $\begin{cases} x_0 = x(0) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ y_0 = y(0) = 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ z_0 = z(0) = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$

Ce qui donne, en inversant le système que : $\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{x_0 - y_0}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{-x_0 + y_0 + 2z_0}{2} \\ \lambda_s 3 = \dfrac{x_0 + y_0 - 2z_0}{2} \end{cases}$

Ce qui donne alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \big((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)\big)e^{2t} + \big(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\big)e^{6t} \\ y(t) = \big((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - x_0)\big)e^{2t} + \big(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\big)e^{6t} \\ z(t) = \big((x_0 - y_0)t + z_0\big)e^{2t} \end{cases}$$

NB : *Les candidats qui démarrent correctement, mais qui obtiennent quelques erreurs de calculs peuvent obtenir des points de méthode à condition d'être honnête et de signaler leur erreur manifeste sur leur copie. Les candidats qui trafiquent leurs calculs erronés pour obtenir le résultat de l'énoncé seront sanctionnés.*

12. En particulier, lorsque $x_0 = y_0$, on obtient que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = z_0 e^{2t} + (x_0 - z_0)e^{6t} \\ y(t) = z_0 e^{2t} + (x_0 - z_0)e^{6t} \\ z(t) = z_0 e^{2t} \end{cases}$$

En particulier, on a bien $\boxed{x(t) = y(t) \text{ pour tout } t \text{ réel.}}$