Mathématiques appliquées - Sujet zéro 1

Exercice 1

Partie 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A.

1. Déterminer le rang de $A - 6I_3$.
   En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.
2. Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.
   Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.
3. Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Donner la matrice B de f dans cette base.
   (c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter la matrice P. On ne cherchera pas P^{-1}.
4. La matrice A est-elle inversible ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

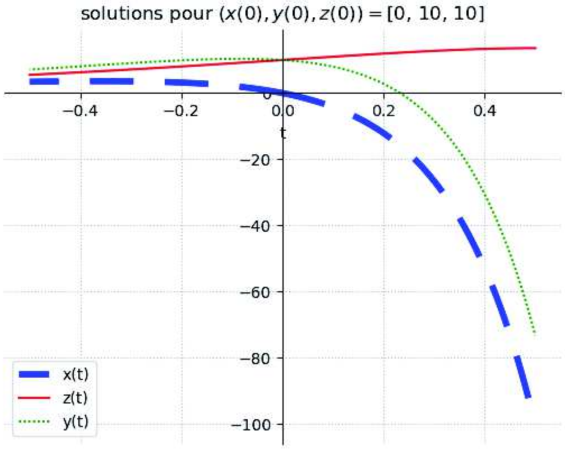
Partie 2

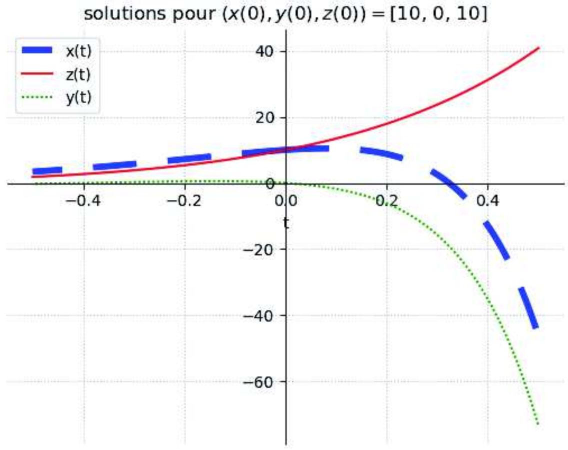
On considère le système différentiel suivant :

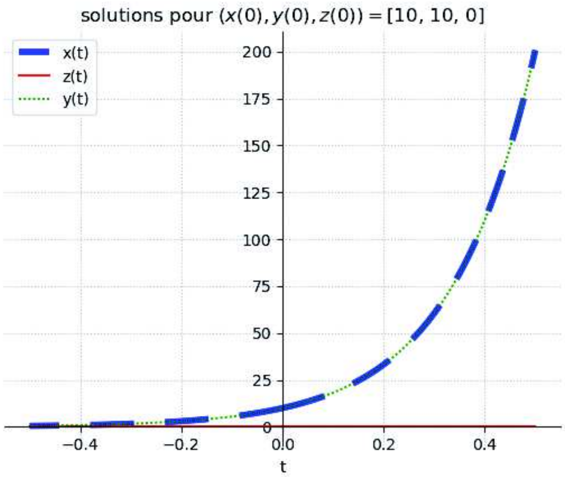
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) & = & 5x(t) + y(t) - 4z(t), \\ y'(t) & = & 3x(t) + 3y(t) - 4z(t), \\ z'(t) & = & x(t) - y(t) + 2z(t). \end{cases}$$

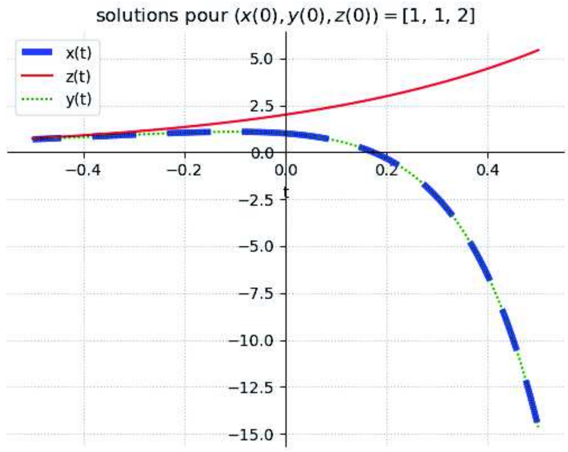
où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note pour tout réel t : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

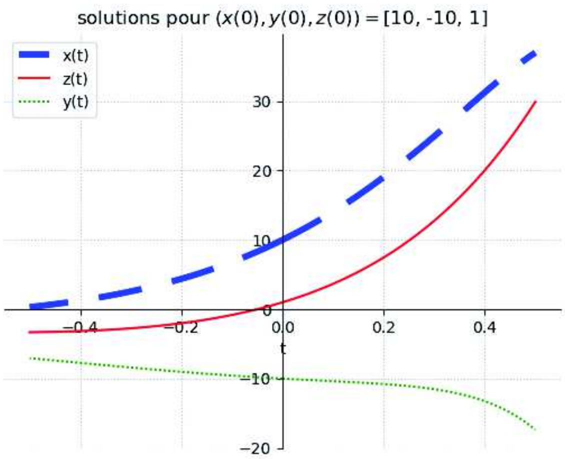
5. En utilisant le module `scipy.integrate` de Python, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier les valeurs de $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$.

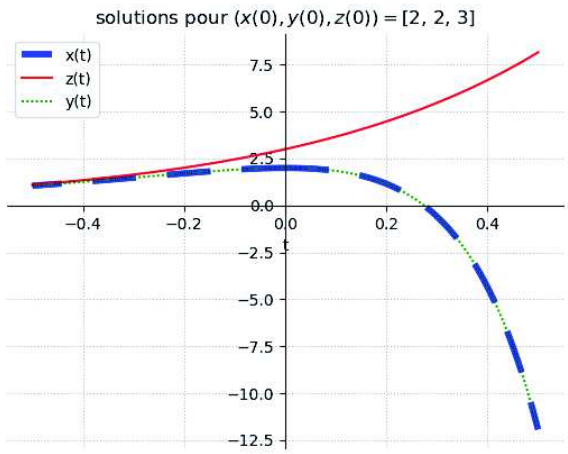












Que peut-on conjecturer quand $x(0) = y(0)$?

6. Montrer que pour tout réel t : $X'(t) = A\,X(t)$.
7. On note pour tout réel t : $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que pour tout réel t, $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
   Montrer que pour tout réel t : $Y'(t) = B\,Y(t)$.

8. (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 6\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

(b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_2)$$

(c) Soit c un réel.
Montrer que la fonction $t \longmapsto cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_3$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

Déterminer toutes les solutions de $(\mathscr{E}_3)$.

9. En notant, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de $(\mathscr{E}_1)$, β est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et α est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

10. Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array} \right.$$

11. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$, que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)\right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - x_0)\right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ z(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0\right)e^{2t} \end{array} \right.$$

12. Justifier la conjecture faite à la question 5.