ECG 2 - maths appli. **Devoir en temps libre n°4** Pour le 4 décembre 2025

Corrigé *Total sur 19 points*

Exercice 1

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

On note pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ *2 points*

On montre d'abord que pour t au voisinage de $+\infty$, $t^n e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

en effet, $\dfrac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^n e^{-t} \times t^2 = t^{n+2}e^{-t} = \dfrac{t^{n+2}}{e^t}$

or par croissances comparées $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{n+2}}{e^t} = 0$ i.e. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = 0$

donc par définition $t^n e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (en $+\infty$)

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann, avec $\alpha > 1$)

donc par théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives (c'est le cas de $t \mapsto t^n e^{-t}$), $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et donc par relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, i.e. $\boxed{I_n \text{ est convergente}}$

b. Calculer I_0 et I_1 *2 points*

Par propriété du cours (car $t^0 = 1$) $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge et vaut 1 donc } I_0 = 1}$

Pour I_1, nous verrons prochainement qu'il s'agit de l'espérance d'une variable à densité d'une loi exponentielle. En attendant, nous allons le démontrer avec une intégration par parties. Soit $A > 0$, alors en posant $u(t) = t$ et $v(t) = -e^{-t}$, on a $u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{-t}$, on obtient :

$$\int_0^A te^{-t}\mathrm{d}t = [-te^{-t}]_0^A - \int_0^A (-e^{-t})\mathrm{d}t$$

$$\int_0^A te^{-t}\mathrm{d}t = Ae^{-A} + [-e^{-t}]_0^A = Ae^{-A} + 1 - e^{-A}$$

or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} Ae^{-A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{A}{e^A} = 0$ (par croissances comparées) et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{e^A} = 0$
par quotient

donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A te^{-t}\mathrm{d}t = 1$ i.e. $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge et vaut 1, i.e. } I_1 = 1}$

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$ est convergente. *1,5 points*

Soit $x \geqslant 0$ alors pour $t \geqslant 0$, $xt \geqslant 0$ donc $1 + xt \geqslant 1$
donc, la fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$,
$0 < \dfrac{1}{1+xt} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant e^{-t}$ (car $e^{-t} \geqslant 0$)

or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge (cours et il s'agit de I_0) donc par théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \text{ converge}}$

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall x \in [0,+\infty[,\quad F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$ *0,25 point*

Par définition, $\boxed{F(0) = I_0 = 1}$

4. Soit x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$, montrer que $F(y) \leqslant F(x)$ *1 point*
Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

Comme vu plus plus haut, pour $0 \leqslant x \leqslant y$ et $t \geqslant 0$, $0 \leqslant xt \leqslant yt$ donc $0 < 1+xt \leqslant 1+yt$ donc, la fonction inverse étant décroissante sur $]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{1+yt} \leqslant \dfrac{1}{1+xt}$ donc $\dfrac{e^{-t}}{1+yt} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$ et les deux intégrales étant convergentes, par croissance l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$ i.e. $\boxed{F(y) \leqslant F(x)}$, autrement dit $\boxed{F \text{ est décroissante}}$

5. **a.** Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t$ *1,5 points*

On distinguera le cas $x = 0$ et le cas $x > 0$

1

$\underline{1^{\text{er}}\text{ cas}}$: si $x = 0$, $\quad\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t = \boxed{1}$

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$: si $x > 0$,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[\ln|1+xt|\Big]_0^1 = \frac{1}{x}\Big[\ln(1+xt)\Big]_0^1 = \frac{1}{x}\big(\ln(1+x) - \ln 1\big)$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t = \frac{\ln(1+x)}{x}}$

b. Montrer que, pour tout réel x positif : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t$ *1 point*

$\forall t \in [0,1]$, $-t \leqslant 0$ et donc par croissance de l'exponentielle $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$
donc en multipliant par $\dfrac{1}{1+xt} > 0$, il vient $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \dfrac{1}{1+xt}$
donc par positivité et croissance de l'intégrale (et car $0 < 1$) on en déduit que :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t}$$

c. Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ *1 point*

$\forall x > 0$, $\forall t \geqslant 1$, $1+xt \geqslant 1+x \geqslant x$ donc (inverse) $\dfrac{1}{1+xt} \leqslant \dfrac{1}{x}$ puis $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x}$
et enfin par croissance de l'intégrale (avec les bornes rangées dans l'ordre croissant et les intégrales convergentes, grâce à I_0 et Chasles pour la deuxième)

$0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ (car x ne dépend pas de t)

on a donc bien $\boxed{0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t}$

d. A l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

$F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$ par relation de Chasles *2 points*

donc $0 \leqslant F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ d'après **5.b. et 5.c.**

donc $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ d'après **5.a.**

or $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ car $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissance comparée et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x = +\infty$ d'où le résultat par composition et par ailleurs $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 0$; et enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 0$ (car l'intégrale converge, c'est donc un nombre fini) donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$ est convergente.

a. Montrer que : $F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1-xt)\,\mathrm{d}t = x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$ *1 point*

$\forall x \geqslant 0$, par linéarité $I_0 - xI_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t$ donc l'intégrale converge

$$\begin{aligned}
\text{donc } F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+xt} - (1-xt)\right) e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(1-(xt)^2\right)}{1+xt} e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x^2t^2}{1+xt} e^{-t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

donc $\boxed{F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t = x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t}$ (car x^2 ne dépend pas de t)

b. En déduire que : $0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2$ *1,5 points*

Tout d'abord, on doit montrer que l'expression de la question précédente est positive puisque x et t sont positifs, $\dfrac{t^2e^{-t}}{1+xt} \geqslant 0$

puis par positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \geqslant 0$ et donc $x^2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \geqslant 0$

d'autre part, comme évoqué plus haut $\forall x \geqslant 0$, par linéarité de l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t - x\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t = I_0 - xI_1$

de plus, $\forall x \geqslant 0$, $\forall t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{1+xt} \leqslant 1$(vu plus haut), donc $\dfrac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leqslant t^2e^{-t}$ car $t^2e^{-t} > 0$
et donc en utilisant la croissance de l'intégrale (avec les intégrales convergentes, l'une admise, l'autre valant I_2 et les bornes rangées dans l'ordre croissant),
on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t = x^2I_2$ car I_2 converge
des points précédents, on déduit de la question précédente que $0 \leqslant F(x)-(I_0-xI_1) \leqslant x^2I_2$
et donc que $\boxed{0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2I_2}$

7. **a.** En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 : $F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$ *1 point*

On a donc $\forall x > 0, 0 \leqslant F(x) - 1 + x \leqslant x^2I_2$ d'après la question **1.b.**
et donc $(x \neq 0), 0 \leqslant \dfrac{F(x)-1+x}{x} \leqslant xI_2$
or $\lim\limits_{x\to 0} xI_2 = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-1+x}{x} = 0$ ce qui signifie que au voisinage de 0 : $F(x)-1+x = o(x)$ et par conséquent, $\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)}$

par unicité, il s'agit là du développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de $F(x)$

b. Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$ *1 point*

Grâce au développement limité de F en 0,
$\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \dfrac{F(x)-1}{x} = \dfrac{-x+o(x)}{x} = -1 + \dfrac{o(x)}{x}$
or par définition $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = -1$

donc $\boxed{F \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } F'(0) = -1}$

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$
En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F. On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0 *2,25 points*

Par définition du développement limité d'une fonction dérivable en 0 (qui « commence par $F(0) + F'(0)x$ »), la tangente à la courbe de F en 0 a pour équation $y = 1 - x$
de plus on sait que f est décroissante et qu'elle tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on peut proposer l'allure suivante :