Ce problème a pour objet principal la modélisation d'un processus aléatoire ponctuel (discret) représenté par une suit de variables aléatoires de Bernoulli. Ce modèle est ensuite approché par un modèle continu, et dans la dernière partie, on s'intéresse, dans un cas particulier, à l'adéquation de ce modèle continu au modèle discret initial.
Dans tout le problème, λ désigne un nombre réel de l'intervalle ouvert $]0,1[$

Partie I : Modèle discret

On suppose donnée une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note p_n le paramètre de la variable aléatoire X_n
On suppose que p_0 appartient à l'intervalle ouvert $]0,1[$ et que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = P(X_n=1) = p_n \text{ et } P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = \lambda P(X_n=1) = \lambda p_n$$

[On rappelle que la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ peut aussi se noter $P(B/A)$]

1. **a.** Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $p_{n+1} = (1-\lambda)p_n^2 + \lambda p_n$

b. En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $0 < p_n < 1$

2. **a.** Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

b. On pose $a = (1-\lambda)p_0 + \lambda$. Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'inégalité : $p_n \leqslant a^n$
En déduire que la série de terme général p_n est convergente.

3. Pour tout n de N, on définit la variable aléatoire Y_n par : $Y_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$

et on note $E(Y_n)$ son espérance.

a. Justifier l'existence de la limite L de la suite $(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$

4. **a.** Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la covariance $Cov(X_n, X_{n+1})$ de X_n et X_{n+1} en fonction de p_n et p_{n+1}
Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

b. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\right) = \lambda$

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note r_n le coefficient de corrélation linéaire entre X_n et X_{n+1} :

$$r_n = \frac{Cov(X_n, X_{n+1})}{\sqrt{V(X_n)V(X_{n+1})}} \qquad \text{où } V \text{ désigne la variance.}$$

Exprimer r_n en fonction de p_n et p_{n+1}
Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, r_n est équivalent à $\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}p_n$

Partie II : Simulation informatique

On importe sous Python les bibliothèques numpy et numpy.random par les commandes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

On rappelle que la commande `rd.binomial(n, p)` renvoie une simulation de la loi binomiale de paramètres n et p

1. On considère la fonction suivante :

```
def simulation(N, p0, mu):
  p=p0; x=rd.binomial(1, p); y=x
  for i in range(N):
    q=p;
    if x==0:
      q=mu*p
      x=rd.binomial(1,q)
      y+=x
      p=p*((1-mu)*p+mu)
  return y
```

   Expliquer ce que renvoie cette fonction.

2. On exécute les lignes de commandes suivantes :

```
T=np.zeros(201)
for i in range(10000):
  y=simulation(200, 0.25, 0.7)
  T[y] +=1
T=T/10000;
```

   Que contient le tableau T après la ligne 5 et quelle loi de probabilité approche-t-il ? Justifier la réponse.
   Compléter le script pour calculer une valeur approchée de l'espérance de cette loi.

Partie III : Modèle continu

Soit ℓ tel que $0 < \ell < 1$ et soit T un réel strictement positif. Pour tout t de $[0, T]$, on définit une variable aléatoire $X(t)$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p(t)$, c'est à dire que : $p(t) = P(X(t) = 1)$ On suppose que la fonction p est définie et dérivable sur $[0, T]$, de dérivée p', et vérifie la relation :

$$\forall t \in [0, T] \qquad p'(t) = (1 - \ell)p(t)(p(t) - 1)$$

On note $p(0) = p_0$ et on suppose que p_0 appartient à l'intervalle ouvert $]0, 1[$

1. Soit f la fonction définie sur $[0, T]$ par $f(t) = p(t) \times e^{(1-\ell)t}$. Montrer que f est croissante sur $[0, T]$ et en déduire que la fonction p ne s'annule pas sur $[0, T]$

2. **a.** Soit g la fonction définie sur $[0, T]$ par : $g(t) = \dfrac{e^{-(1-\ell)t}}{p(t)}$

Exprimer $g'(t)$ en fonction de ℓ et t et en déduire qu'il existe une constante k telle que, pour tout t de $[0, T]$, $g(t) = k + e^{(\ell-1)t}$

b. Montrer que, pour tout t de $[0, T]$, on a : $p(t) = \dfrac{p_0}{p_0 + (1 - p_0)e^{(1-\ell)t}}$

c. Dresser le tableau de variations de p sur $[0, T]$. Soit (C) la courbe représentative de p dans le plan rapporté à un repère orthogonal. A quelle condition, portant sur p_0, la courbe (C) présente-t-elle un point d'inflexion ? Quelles sont alors les coordonnées de ce point ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\delta = \dfrac{T}{n}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $t_k = k\delta$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X(t_k)$, d'espérance $E(Z_n)$

a. Montrer que la suite $\left(\dfrac{E(Z_n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ est convergente et de limite $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p(t)\, dt$

Cette limite sera notée $m(T)$ dans la suite de cette partie.

b. Justifier la validité du changement de variable $u = e^{(1-\ell)t}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^T p(t)\, dt$ et en déduire que l'on a :

$$m(T) = \frac{1}{(1-\ell)T} \int_1^{e^{(1-\ell)T}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1 - p_0}{p_0 + (1 - p_0)u}\right) du$$

c. En déduire une expression de $m(T)$ en fonction de p_0, ℓ et T et montrer que , lorsque T tend vers $+\infty$, p_0 et ℓ étant fixés, $m(T)$ est équivalent à $-\dfrac{\ln(1 - p_0)}{(1 - \ell)T}$

Partie IV : Retour au modèle discret

Soit n un entier naturel non fixé.
Avec les notations des **parties I** et **III**, on suppose que $p_0 = \dfrac{1}{3}$, $\ell = \dfrac{1}{2}$ et $T = 2n(1-\lambda)$

1. Montrer que la fonction p définie dans la partie III est deux fois dérivable sur $[0,T]$, et montrer que pour tout t de $[0,T]$: $\quad p''(t) = \dfrac{1}{4}(2p(t)-1)p(t)(p(t)-1)$
où p'' désigne la dérivée seconde de p

2. On rappelle que pour tout k de $[\![0,n]\!]$, $\quad t_k = k\delta = k\dfrac{T}{n}$ et que p_k a été défini dans la **partie I**.
Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on pose $\varepsilon_k = p(t_k) - p_k$

- **a.** Etablir, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, l'inégalité suivante : $\quad |p(t_{k+1}) - p(t_k) - \delta p'(t_k)| \leqslant \dfrac{\delta^2}{8}$
- **b.** Etablir, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, l'égalité :
$p(t_k) + \delta p'(t_k) - p_{k+1} = \varepsilon_k[1-(1-\lambda)(1-p(t_k)-p_k)]$
- **c.** En déduire, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, l'inégalité suivante : $|\varepsilon_{k+1}| \leqslant \dfrac{\delta^2}{8} + \dfrac{1}{3}(\lambda+2)|\varepsilon_k|$
- **d.** Etablir, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, l'inégalité : $|\varepsilon_k| \leqslant 6(1-\lambda)$

3. Pour tout réel α tel que $\alpha > 18(1-\lambda)$, on pose : $\quad N(\alpha) = \dfrac{1}{1-\lambda}\ln\left(\dfrac{\alpha}{12(1-\lambda)} - \dfrac{1}{2}\right)$

- **a.** Vérifier que pour tout réel $\alpha > 18(1-\lambda)$, on a $N(\alpha) > 0$
- **b.** Montrer que si $n \leqslant N(\alpha)$, alors pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on a : $\quad \left|\dfrac{p(t_k)-p_k}{p(t_k)}\right| \leqslant \alpha$
- **c.** Montrer que, pour α fixé, $\lim\limits_{\lambda\to 1} N(\alpha) = +\infty$
- **d.** Conclure sur la qualité de l'approximation du modèle discret par le modèle continu, lorsque λ se « rapproche » de 1