Problème

Partie I

1. **a.** On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P(X_{n+1}=1) &= P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)P(X_n=1) + P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)P(X_n=0) \\ &= p_n^2 + \lambda p_n(1-p_n) \\ &= p_n^2(1-\lambda) + \lambda p_n \end{aligned}$$

b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété (H_n) $\quad 0 < p_n < 1$.
Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse initiale, donc (H_0) est vérifiée.
Supposons (H_n) vérifiée, on a donc $0 < p_n^2 < 1$.
Donc $0 < (1-\lambda)p_n^2 < (1-\lambda)$ (car $(1-\lambda > 0)$ et $0 < \lambda p_n < \lambda$
Par addition : $0 < (1-\lambda)p_n^2 + \lambda p_n < 1$. Donc (H_{n+1}) est vérifiée.

2. **a.** Formons la différence $p_{n+1} - p_n$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= (1-\lambda)p_n^2 + \lambda p_n - p_n \\ &= (1-\lambda)(p_n^2 - p_n) \\ &= (1-\lambda)p_n(p_n - 1) \\ &< 0 \qquad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

La suite (p_n) est décroissante, minorée par 0 donc convergente.

Soit ℓ la limite. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation $p_{n+1} = (1-\lambda)p_n^2 + \lambda p_n$, on obtient : $\ell = (1-\lambda)\ell^2 + \lambda\ell$, soit encore $(1-\lambda)\ell(1-\ell) = 0$.

On obtient donc : $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
Or cette dernière égalité est impossible, car $\ell \leqslant p_0 < 1$.
Donc $\boxed{\ell = 0}$

b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété (G_n) $\quad p_n \leqslant a^n$.
Pour $n = 0$, $p_0 < 1$ donc (G_0) est vérifiée.
Supposons (G_n) vérifiée. On sait que $p_{n+1} = p_n[(1-\lambda)p_n + \lambda]$.
Or $p_n \leqslant p_0$, donc $(1-\lambda)p_n + \lambda \leqslant (1-\lambda)p_0 + \lambda = a$
Donc $p_{n+1} \leqslant a^n a$.
Ainsi $p_{n+1} \leqslant a^{n+1}$.

$0 < p_0 < 1$ donc $a = (1-\lambda)p_0 + \lambda$ vérifie $\lambda < a < (1-\lambda) + \lambda$.
On a donc $0 < a < 1$, ce qui prouve que la série géométrique $\sum a^n$ converge.

Or $p_n \geqslant 0$, d'après la règle de majoration des séries à termes positifs, la série $\sum p_n$ converge.

3. **a.** On utilise la linéarité de l'espérance :

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} E(X_k) = \sum_{k=0}^{n} p_k$$

Donc $$\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \qquad \text{(série convergente)}$$

Donc L **existe**

4. **a.** $(X_nX_{n+1})(\Omega)=\{0,1\}$ (loi de Bernoulli) donc :

$$\begin{aligned} E(X_nX_{n+1}) &= P(X_n=1\cap X_{n+1}=1)\\ &= P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)P(X_n=1)\\ &= p_n^2 \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} Cov(X_n,X_{n+1}) &= E(X_nX_{n+1})-E(X_n)E(X_{n+1})\\ &= p_n^2-p_np_{n+1}\\ &= p_n(p_n-p_{n+1}) \end{aligned}$$

Or on sait que $p_n\in]0,1[$ et $p_n-p_{n+1}>0$ donc $Cov(X_n,X_{n+1})\neq 0$

Donc X_n **et** X_{n+1} **ne sont pas indépendantes.**

b. $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=(1-\lambda)p_n+\lambda$ et on sait que (p_n) converge vers 0,

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}=\lambda.$

c. $\sigma(X_n)=\sqrt{p_n(1-p_n)}\sim\sqrt{p_n}$ quand $n\to+\infty$ (car $p_n\to 0$).

Autrement dit,

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{p_n(p_n-p_{n+1})}{\sigma(X_n)\sigma(X_{n+1})}\\ &\sim \frac{p_n(p_n-\lambda p_n-(1-\lambda)p_n^2)}{\sqrt{p_n}\sqrt{p_{n+1}}}\\ &\sim \frac{p_n^2(1-\lambda-(1-\lambda)p_n)}{\sqrt{p_n}\sqrt{p_n}\sqrt{(1-\lambda)p_n+\lambda)}}\\ &\sim \frac{p_n^2(1-\lambda)}{p_n\sqrt{\lambda}}\\ &\sim \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}p_n \end{aligned}$$

Partie II

1. Cette fonction calcule une réalisation de Y_N. En particulier, q représente p_{k+1}, initialisé à p_k à la ligne 4, modifié si $X_k=0$ dans la ligne 5, et p est réactualisé en ligne 8.

2. Après la ligne 4, pour $k\in[\![1,201]\!]$, `T[k]` correspond au nombre de fois où Y_{200} vaut k sur 10000 tirages, avec les valeurs $p_0=0.25$ et $\lambda=0.7$

Après la ligne 5, T contient les fréquences des valeurs de Y_{200} obtenues sur 10000 réalisations, donc on pourra estimer que $T[k]\simeq P(Y=k)$

Remarque : $Y_{200}(\Omega)=[\![0,201]\!]$.

Pour calculer $E(Y_{200})$, il faut calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{201}kP(Y=k)$.

Les valeurs `T[k]` approcheront $P(Y=k)$, donc il faudra calculer la somme des valeurs : `k*T[k]` pour k de 0 à 201 pour avoir une valeur approchée de $E(Y_{200})$.

On peut compléter le script en :

```
esperance=0
for k in range(202):
  esperance=esperance+k*T[k]
print(esperance)
```

Partie III

1. $f$est dérivable sur $[0,T]$ et

$$\forall t\in[0,T]\qquad \begin{aligned} f'(t) &= p'(t)e^{(1-\ell)t}+p(t)(1-\ell)e^{(1-\ell)t}\\ &= e^{(1-\ell)t}[(1-\ell)p(t)(p(t)-1)+(1-\ell)p(t)]\\ &= (1-\ell)p(t)^2e^{(1-\ell)t}\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

Donc f est **croissante** sur $[0,T]$.
$f(0)=p(0)=p_0\in]0,1[$
donc $f(t)\geqslant f(0)>0$ donc $p(t)=0$ est impossible.
Or $p(t)$ est une probabilité donc $p(t)\in]0,1]$

2. **a.** $p(t)$ ne s'annule pas sur $[0,T]$ donc g est dérivable sur $[0,T]$.

$$\forall t\in[0,T]\qquad \begin{aligned} g'(t) &= \frac{-(1-\ell)e^{-(1-\ell)t}p(t)-p'(t)e^{-(1-\ell)t}}{p(t)^2}\\ &= \frac{e^{-(1-\ell)t}p(t)(1-\ell)}{p(t)^2}\\ &= -(1-\ell)e^{-(1-\ell)t}\end{aligned}$$

On peut primitiver : $g(t)=e^{-(1-\ell)t}+K$ (K étant une constante).

b. Pour $t=0$, on a donc $g(0)=1+K=\dfrac{1}{p_0}$ donc $K=\dfrac{1-p_0}{p_0}$.

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{e^{-(1-\ell)t}}{\frac{1-p_0}{p_0}+e^{-(1-\ell)t}}\\ &= \frac{p_0e^{-(1-\ell)t}}{(1-p_0)+p_0e^{-(1-\ell)t}}\\ &= \frac{p_0e^{-(1-\ell)t}}{e^{-(1-\ell)t}[(1-p_0)e^{(1-\ell)t}+p_0]}\\ &= \frac{p_0}{p_0+(1-p_0)e^{(1-\ell)t}}\end{aligned}$$

c. $p'(t)=(1-\ell)p(t)(p(t)-1)\leqslant 0$ donc p est une fonction décroissante sur $[0,T]$.
$p([0,T])=[p_0,m]$ avec $m=p(T)$.
$p'(t)=(1-\ell)p(t)(p(t)-1)$
Donc p' est dérivable et

$$\begin{aligned} p''(t) &= (1-\ell)[p'(t)(p(t)-1)+p(t)p'(t)]\\ &= (1-\ell)[2p(t)p'(t)-p'(t)]\\ &= (1-\ell)^2[2p(t)^2(p(t)-1)-p(t)(p(t)-1)]\\ &= (1-\ell)^2p(t)[p(t)-1][2p(t)-1]\end{aligned}$$

Donc p'' est continue, et la courbe (C) aura un point d'inflexion au point d'abscisse t si $p''(t)$ s'annule et change de signe en t. Or

$$\begin{aligned} p''(t)=0 &\iff p(t)=\frac{1}{2}\\ &\iff 2p_0=p_0+(1-p_0)e^{(1-\ell)t}\\ &\iff (1-p_0)e^{(1-\ell)t}=p_0\\ &\iff e^{(1-\ell)t}\frac{p_0}{1-p_0}\\ &\iff t=\frac{1}{1-\ell}\ln\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)\end{aligned}$$

Reste à chercher une condition d'existence de ce point d'inflexion.

Le point existe si et seulement si $(i)\quad 0 < \dfrac{1}{1-\ell}\ln\left(\dfrac{p_0}{1-p_0}\right) < T$.

L'inégalité de gauche est facile à interpréter : elle devient $\dfrac{p_0}{1-p_0} > 1$, c'est à dire $p_0 > \dfrac{1}{2}$.

L'inégalité de droite se lit : $(ii)\quad \dfrac{1}{1-\ell}\ln\left(\dfrac{p_0}{1-p_0}\right) < T$

$$\begin{aligned}(ii) \iff & \frac{p_0}{1-p_0} < e^{(1-\ell)T}\\ \iff & p_0 < (1-p_0)e^{(1-\ell)T}\\ \iff & p_0(1+e^{(1-\ell)T} < e^{(1-\ell)T}\\ \iff & p_0 < \frac{e^{(1-\ell)T}}{1+e^{(1-\ell)T}}\end{aligned}$$

La condition d'existence s'écrit donc : $\dfrac{1}{2} < p_0 < \dfrac{e^{(1-\ell)T}}{1+e^{(1-\ell)T}}$.

3. **a.** On utilise la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\frac{E(Z_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} E(X(t_k))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} p(X(t_k)=1)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} p(t_k))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} p\left(k\frac{T}{n}\right)\\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{T}{n}\sum_{k=0}^{n} p\left(k\frac{T}{n}\right)\right]\\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n} p\left(k\frac{T}{n}\right)\right] + \frac{1}{n}p_0\end{aligned}$$

On reconnaît dans la dernière somme, une somme des rectangles (hors programme pour nous), qui converge, comme p est continue sur $[0,T]$ vers $\displaystyle\int_0^T p(t)\ dt$. L'autre terme tend vers 0.

Donc : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(Z_n)}{n} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\ dt$

b. On pose $u(t) = e^{(1-\ell)t}$, ou encore $t = \dfrac{1}{1-\ell}\ln u$.

$t=0 \iff u=1$

$t=T \iff u = e^{(1-\ell)T}$

$dt = \dfrac{1}{1-\ell}\dfrac{du}{u}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}m(T) &= \frac{1}{T}\frac{1}{1-\ell}\int_{u=1}^{u=e^{(1-\ell)T}} \frac{p_0}{u(p_0+(1-p_0)u)\ du}\\ &= \frac{1}{(1-\ell)T}\int_1^{e^{(1-\ell)T}} \left[\frac{1}{u} - \frac{1-p_0}{p_0+(1-p_0)u}\right]\ du\end{aligned}$$

c. On peut maintenant intégrer :

$$\begin{aligned} m(T) &= \frac{1}{(1-\ell)T}\left[\ln|u| + \ln|p_0 - (1-p_0)u|\right]_1^{e^{(1-\ell)T}} \\ &= \frac{1}{(1-\ell)T}\left[\ln\left(\frac{u}{p_0+(1-p_0)u}\right)\right]_1^{e^{(1-\ell)T}} \\ &= \frac{1}{(1-\ell)T}\ln\left(\frac{e^{(1-\ell)T}}{p_0+(1-p_0)e^{(1-\ell)T}}\right) - \ln\left(\frac{1}{1}\right) \end{aligned}$$

Ainsi : $$\boxed{m(T) = \frac{1}{(1-\ell)T}\ln\left(\frac{e^{(1-\ell)T}}{p_0+(1-p_0)e^{(1-\ell)T}}\right)}$$

Quand $T \to +\infty$, $\quad e^{(1-\ell)T} \to +\infty$, donc :

$$\begin{aligned} m(T) &= -\frac{1}{(1-\ell)T}\ln\left(\frac{(1-p_0)e^{(1-\ell)T}+p_0}{e^{(1-\ell)T}}\right) \\ &= -\frac{1}{(1-\ell)T}\ln\left(1-p_0+\frac{p_0}{e^{(1-\ell)T}}\right) \end{aligned}$$

On a bien : $\qquad m(T) \sim -\dfrac{1}{(1-\ell)T}\ln(1-p_0)$

Partie IV

1. Les calculs ont déjà été faits :

$p'(t) = \dfrac{1}{2}p(t)(p(t)-1))$

$p''(t) = \dfrac{1}{4}p(t)(p(t)-1)(2p(t)-1)$

2. **a.** On utilise l'inégalité de Taylor (hors programme pour nous), elle même issue de la formule de Taylor avec reste intégrale :

Si p est C^2 sur $[a,b]$: $\quad p(b) = p(a) + p'(a)(b-a) + \displaystyle\int_a^b (b-t)p''(t)dt$

Donc $|p(b) - p(a) - p'(a)(b-a)| \leqslant M_2\dfrac{(b-a)^2}{2} \qquad$ avec $M_2 = \sup\limits_{[a,b]}|p''|$.

En prenant $a = t_k$, $b = t_{k+1}$, alors $(b-a) = t_{k+1} - t_k = \delta$.

$|p''(t)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ d'après la question 1)

Donc $p(t_{k+1}) - p(t_k) - \delta p'(t_k)| \leqslant \dfrac{\delta^2}{8}$

b. Posons $A = p(t_k) + \delta p'(t_k) - p_{k+1}$. Ici $\delta = \dfrac{T}{n} = 2(1-\lambda)$.

Donc :

$$\begin{aligned} A &= p(t_k) + 2(1-\lambda)\frac{1}{2}p(t_k)(p(t_k)-1) - (1-\lambda)p_k^2 - \lambda p_k \\ &= p(t_k) + (1-\lambda)p(t_k)^2 -' 1-\lambda)p(t_k) - (1-\lambda)p_k^2 - \lambda p_k \\ &= (1-\lambda)[p(t_k)^2 - p_k^2] + \lambda[p(t_k) - p_k] \\ &= (1-\lambda)\varepsilon_k(p(t_k)+p_k) + \lambda\varepsilon_k \\ &= \varepsilon_k[(1-\lambda)(p(t_k)+p_k) + \lambda] \end{aligned}$$

Posons $B = \varepsilon_k[1-(1-\lambda)(1-p(t_k)-p_k)]$
$B = \varepsilon_k[(1-\lambda)(p(t_k)+p_k)-(1-\lambda)+1]$

Donc $B = A$.

c. On utilise les deux majorations précédentes :

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_{k+1}| &= |p(t_{k+1})-p_{k+1}| \\
&= |p(t_{k+1})-p(t_k)-\delta p'(t_k)+p(t_k)+\delta p'(t_k)-p_{k+1}| \\
&\leqslant |p(t_{k+1})-p(t_k)-\delta p'(t_k)|+|p(t_k)+\delta p'(t_k)-p_{k+1}| \\
&\leqslant \frac{\delta^2}{8}+|\varepsilon_k|[1-(1-\lambda)(1-p_(t_k)-p_k)]
\end{aligned}$$

Posons $C = 1-(1-\lambda)(1-p(t_k)-p_k)$. On sait que $0 \leqslant p_k \leqslant \frac{1}{3}$ et $0 \leqslant p_(t_k) \leqslant \frac{1}{3}$ car $p_0 = \frac{1}{3}$

donc $\quad 0 \leqslant p_k + p(t_k) \leqslant \frac{2}{3}$

donc $\quad \frac{1}{3} \leqslant 1 - p_k - p(t_k) \leqslant 1$

donc $\quad \frac{1-\lambda}{3} \leqslant (1-\lambda)[1-p_k-p(t_k)] \leqslant 1-\lambda$

donc $\quad \lambda - 1 \leqslant -(1-\lambda)[1-p_k-p(t_k)] \leqslant \frac{\lambda-1}{3}$

donc $1+\lambda-1 \leqslant C \leqslant 1+\frac{\lambda-1}{3}$

donc $C \leqslant \frac{2+\lambda}{3}$

donc $|\varepsilon_{k+1}| \leqslant \frac{\delta^2}{8}+|\varepsilon_k|\frac{2+\lambda}{3}$

d. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, la propriété : $\qquad (H_k) \quad |\varepsilon_k| \leqslant 6(1-\lambda)$
Pour $k = 0$, $\varepsilon_0 = p(t_0) - p_0 = p(0) - p_0 = 0$, donc (H_0) est vérifiée.
Supposons $|\varepsilon_k| \leqslant 6(1-\lambda)$ alors , compte tenu de l'égalité $\delta = 2(1-\lambda)$:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_{k+1}| &\leqslant \frac{\delta^2}{8}+\frac{1}{3}(\lambda+2)6(1-\lambda) \\
&\leqslant \frac{\delta^2}{8}+2(\lambda+2)(1-\lambda) \\
&\leqslant \frac{4(1-\lambda)^2}{8}+2(\lambda+2)(1-\lambda) \\
&\leqslant \frac{1-\lambda}{2}[(1-\lambda)+4(\lambda+2)] \\
&\leqslant \frac{1-\lambda}{2}(3\lambda+9) \\
&\leqslant 12\frac{1-\lambda}{2} \\
&\leqslant 6(1-\lambda)
\end{aligned}$$

3. **a.** supposons $\alpha > 18(1-\lambda)$, on a alors $\frac{\alpha}{1-\lambda} > 18$

donc $\quad \frac{1}{12}\frac{\alpha}{1-\lambda} > \frac{3}{2}$

donc $\quad \frac{1}{12}\frac{\alpha}{1-\lambda} - \frac{1}{2} > 1$

donc $\quad \ln\left(\frac{1}{12}\frac{\alpha}{1-\lambda}-\frac{1}{2}\right)>0$

donc $\quad N(\alpha)>0$

b. On suppose $n \leqslant N(\alpha)$, on a alors $n\delta \leqslant N(\alpha)\delta$.
Pour $k \leqslant n \leqslant \mathbb{N}(\alpha)$, on a $k\delta \leqslant n\delta \leqslant N(\alpha)\delta$
c'est à dire $t_k \leqslant N(\alpha)\delta$.
Posons alors $t = N(\alpha)\delta$. On a $t_k \leqslant t$ et comme p est une fonction décroissante, $p(t_k) \geqslant p(t)$.

Calculons $p(t)$:

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{p_0}{p_0+(1-p_0)e^{t/2}} &&= \frac{1/3}{1/3+2/3e^{t/2}} &&= \frac{1}{1+2e^{t/2}}\\
&= \frac{1}{1+2e^{N(\alpha)(1-\lambda)}} &&= \frac{1}{1+2e^{\ln\left(\frac{1}{12}\frac{\alpha}{1-\lambda}-\frac{1}{2}\right)}}\\
&= \frac{1}{1+2\left(\frac{1}{12}\frac{\alpha}{1-\lambda}-\frac{1}{2}\right)} &&= \frac{1}{1+\frac{\alpha}{6(1-\lambda)}-1} &&= \frac{6(1-\lambda)}{\alpha}
\end{aligned}$$

Donc $p(t_k) \geqslant \dfrac{6(1-\lambda)}{\alpha}$ et, ainsi, $\quad \dfrac{1}{p(t_k)} \leqslant \dfrac{\alpha}{6(1-\lambda)}$.

En combinant ce résultat avec $p(t_k)-p_k \leqslant 6(1-\lambda)$ (obtenu en 2) d)

on a bien : $\quad \left|\dfrac{p(t_k)-p_k}{p(t_k}\right| \leqslant \alpha$

c. Posons $u = 1-\lambda$. Quand $\lambda \to 1^-$, $u \to 0^+$.

$N(\alpha) = \dfrac{1}{u}\ln\left(\dfrac{\alpha}{12u}-\dfrac{1}{2}\right)$,
donc $\lim\limits_{\lambda\to 1^-} N(\alpha) = +\infty$

d. Quand λ se " rapproche" de 1, $|\varepsilon_k| \leqslant 6(1-\lambda)$ devient donc "proche" de 0.
Donc $p(t_k)$ est proche de p_k.
$N(\alpha)$ devient "grand", la condition $n \leqslant N(\alpha)$ est donc réalisée , donc , en choisissant α "petit", $p(t_k)$ devient équivalent à p_k.