Sujet d'entrainement n°3

Exercice 1 - extrait Ecricome (un exemple d'exercice avec une petite partie de statistiques)

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.
Et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer $Y(\Omega)$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$

- **a.** On suppose que l'événement $[X = k]$ est réalisé.
  Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
- **b.** Pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, exprimer $P_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j
  On distinguera les cas $j \leqslant k$ et $j \geqslant k + 1$

4.
- **a.** Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$
- **b.** En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$, $P(Y = j) = \dfrac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$

5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que $E(Y) = \dfrac{n+2}{3}$

6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

7.
- **a.** Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$
- **b.** En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{n^2-1}{18}$

8.
- **a.** Ecrire une fonction en langage Python, nommée `seconde_urne`, prenant en entrée un entier naturel `k` non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant $1, 2$ éléments valant 2, … , j éléments valant j, … , jusqu'à k éléments valant k
  Par exemple, l'appel de `seconde_urne(4)` renverra `[1,2,2,3,3,3,4,4,4,4]`.
- **b.** Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel n non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires (X, Y)

```
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
  X = _____
  urne2 = seconde_urne(_____)
  nb = len(urne2)
  i = rd.randint(0, nb)
  Y = _____
  return X,Y
```

- **c.** On considère la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier naturel `n` non nul.

```
def fonction(n):
  liste = [0]*n
  for i in range(10000):
    j = simul_XY(n)[1]
    liste[j-1] = liste[j-1] + 1/10000
  return liste
```

Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$. On simule 50 réalisations du couple de variables aléatoires (X, Y) à l'aide de la fonction `simul_XY` définie à la question **8b**. On représente alors les valeurs obtenues sous forme d'un nuage de points, où les valeurs des réalisations de X sont représentées en abscisse et les valeurs des réalisations de Y en ordonnées. On trace également, sur la même figure, la droite de régression linéaire associée à ce nuage de points.

a. Déterminer par un calcul une valeur approchée des coordonnées du point moyen du nuage de points. Quel théorème de probabilités permet de justifier cette approximation ?

b. Parmi les figures représentées ci-dessous, en justifiant soigneusement votre réponse, indiquer celle qui correspond au nuage de points et à la droite de régression linéaire étudiés.

Figure 1

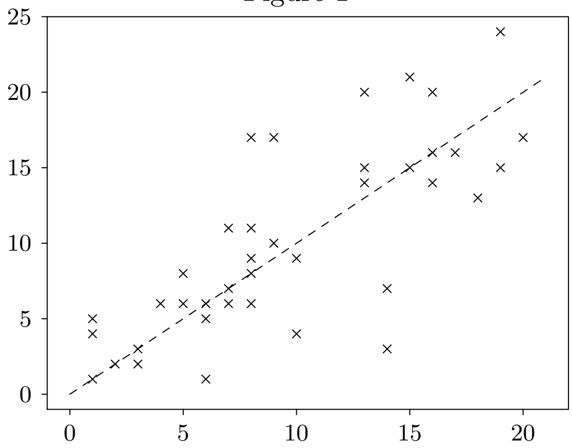


Figure 2

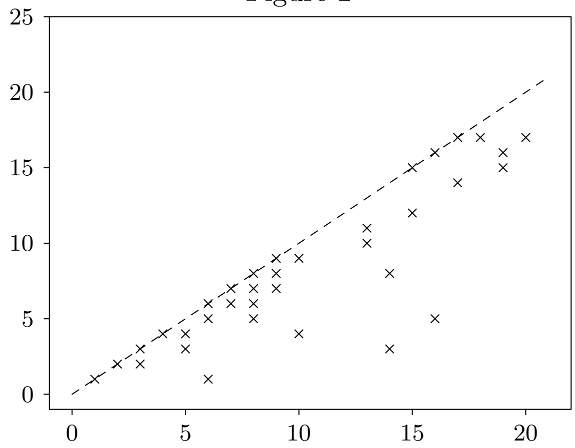


Figure 3

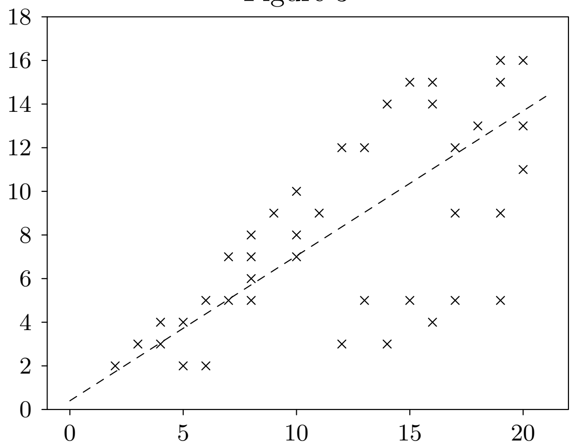
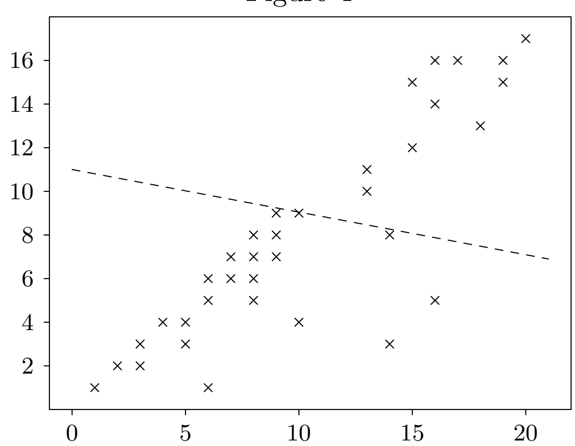


Figure 4



Sujet d'entrainement n°3

Exercice 2 - extrait Ecricome (un exemple d'exercice avec une petite partie de statistiques)

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.
Et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer $Y(\Omega)$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$

- **a.** On suppose que l'événement $[X = k]$ est réalisé.
  Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
- **b.** Pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, exprimer $P_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j
  On distinguera les cas $j \leqslant k$ et $j \geqslant k + 1$

4. **a.** Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$

- **b.** En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$, $P(Y = j) = \dfrac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$

5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que $E(Y) = \dfrac{n+2}{3}$

6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

7. **a.** Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$

- **b.** En déduire que $\text{Cov}(X, Y) = \dfrac{n^2 - 1}{18}$

8. **a.** Ecrire une fonction en langage Python, nommée `seconde_urne`, prenant en entrée un entier naturel `k` non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant 1, 2 éléments valant 2, ... , j éléments valant j, ... , jusqu'à k éléments valant k
  Par exemple, l'appel de `seconde_urne(4)` renverra `[1,2,2,3,3,3,4,4,4,4]`.

- **b.** Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel n non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires (X, Y)

```python
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
  X = _____
  urne2 = seconde_urne(_____)
  nb = len(urne2)
  i = rd.randint(0, nb)
  Y = _____
  return X,Y
```

- **c.** On considère la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier naturel `n` non nul.

```python
def fonction(n):
  liste = [0]*n
  for i in range(10000):
    j = simul_XY(n)[1]
    liste[j-1] = liste[j-1] + 1/10000
  return liste
```

  Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$. On simule 50 réalisations du couple de variables aléatoires (X, Y) à l'aide de la fonction `simul_XY` définie à la question **8b**. On représente alors les valeurs obtenues sous forme d'un nuage de points, où les valeurs des réalisations de X sont représentées en abscisse et les valeurs des réalisations de Y en ordonnées. On trace également, sur la même figure, la droite de régression linéaire associée à ce nuage de points.

a. Déterminer par un calcul une valeur approchée des coordonnées du point moyen du nuage de points. Quel théorème de probabilités permet de justifier cette approximation ?

b. Parmi les figures représentées ci-dessous, en justifiant soigneusement votre réponse, indiquer celle qui correspond au nuage de points et à la droite de régression linéaire étudiés.

Figure 1

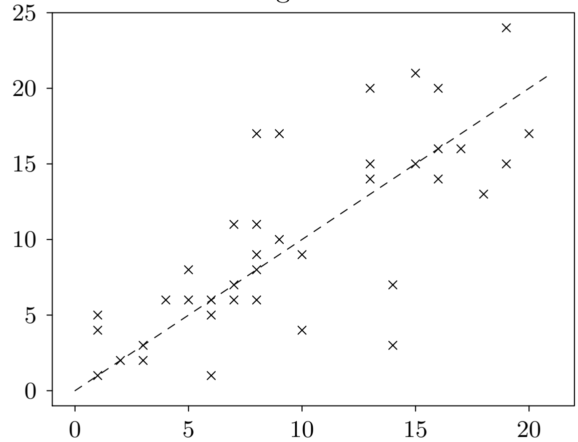


Figure 2

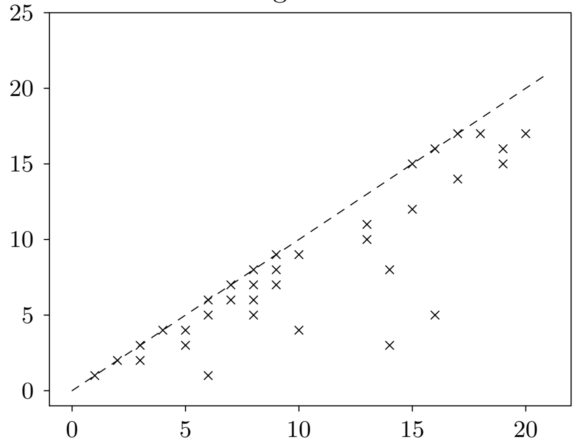


Figure 3

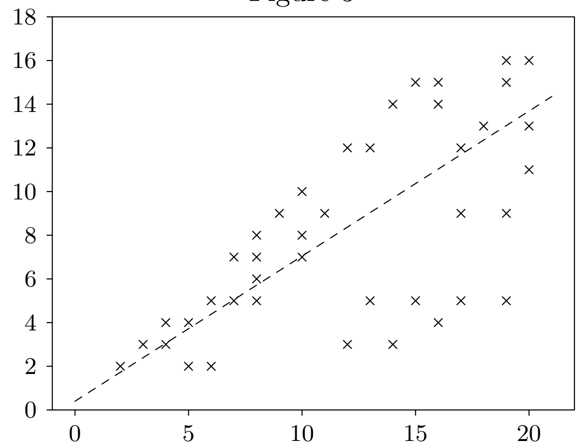


Figure 4