ECG 2 - mathématiques appliquées **Devoir en temps libre n°5** Pour le 8 janvier 2026

Devoir à rendre seul ou en binôme, au choix.

Exercice 1 - exercice 20 de la feuille de T.D. n°8

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme représenté par A relativement à la base canonique $\mathscr{B}$

On pose $u = (2, 1, -2)$

1. **a.** Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$

b. La matrice A est-elle inversible ?

2. **a.** Déterminer le vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et tel que $f(v) = u$

b. Déterminer le vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et tel que $f(w) = v$

3. **a.** Montrer que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

b. Ecrire la matrice N de f relative à la base $\mathscr{B}'$

c. Ecrire la matrice P de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$
Donner une relation entre N, P, et A

d. Calculer N^2, N^3. En déduire que : $A^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout $k \geqslant 3$

4. **a.** Montrer que A ne possède qu'une seule valeur propre et déterminer le sous-espace propre associé.

b. Montrer que, pour tout réel λ non nul, $f - \lambda id_3$ est un automorphisme, id_3 étant l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$

5. On note $g = f - id_3$

a. Ecrire la matrice B de g relative à la base canonique.
Ecrire la matrice M de g relative à la base $\mathscr{B}'$
Donner une relation entre B, M, P

b. Montrer que B est inversible et expliciter B^{-1}

c. Montrer qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = a_n I_3 + b_n N + c_n N^2$$

d. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = a_n I_3 + b_n A + c_n A^2$

e. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n \in \mathrm{Vect}(I_3, B, B^2)$