ECG 2 - mathématiques appliquées **Devoir en temps libre n°6** Pour le 19 janvier 2026

Devoir à rendre en binôme, obligatoirement.

Exercice 1

On désigne par λ un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda|x|e^{-\lambda x^2}$$

1. **a.** Montrer que f est paire.

b. Etablir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

c. Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. Montrer que la fonction de répartition F_X de X s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda x^2}}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-\lambda x^2}}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3. **a.** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$

b. En déduire que X admet une espérance et que : $\mathrm{E}(X) = 0$

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

a. Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X

b. Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ

c. En déduire que X admet une variance et calculer la valeur de $V(X)$

5. Loi d'un maximum.

Dans cette question, on suppose que $\lambda = 1$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots X_n$ de même loi que X et on pose $Z_n = \max(X_1, \ldots X_n)$

a. Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}, [Z_n \leqslant x]$ en fonction des événements $[X_i \leqslant x]$ pour $i \in \{1, \ldots n\}$. En déduire une expression de la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n

b. Montrer que Z_n est une variable à densité et en préciser une densité.