Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :

- justifier qu'une variable aléatoire est à densité à l'aide de sa fonction de répartition ☐
- montrer qu'une fonction est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition associée ☐
- montrer l'existence et calculer l'espérance et la variance de variables aléatoires à densité ☐
- reconnaitre ou utiliser les lois usuelles à l'aide des formules définissant leur fonction de répartion ou leur densité ☐
- appliquer les propriétés habituelles des variables aléatoires dans le cas des variables à densité ☐
- effectuer des transformations sur des variables aléatoires à densité à l'aide de la fonction de répartition ☐

Dans tout le chapitre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé : Ω est l'univers des issues d'une expérience et $\mathscr{A}$ l'ensemble des événements.

1 Rappels et introduction

Rappel n°1 : on dit que X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}$

L'objectif de cette définition est de pouvoir parler de $P(X \leqslant x)$ (puis $P(X = x)$ pour les variables discrètes) et il faut donc que $[X \leqslant x]$ soit un événement.

Rappel n°2 : la **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est la fonction : $x \mapsto P(X \leqslant x)$ définie sur $\mathbb{R}$, on la note généralement F_X ou F, et la donnée de la fonction de répartition **caractérise la loi de la variable aléatoire**.

La fonction de répartition vérifie toujours les propriétés ci-contre (même si elle n'est pas continue dans le cas des variables discrètes) :

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
- $F_X(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$
- $F_X(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Pourquoi des variables à densité ?

Il s'agit de modéliser des situations où les valeurs possibles pour la variable aléatoire sont « continues » (elles ne sont pas discrètes). Donc, contrairement aux variables aléatoires discrètes, on ne cherchera pas ici à déterminer des probabilités du type $P(X = k)$ (où $k \in \mathbb{N}$), mais plutôt la probabilité que la variable aléatoire se situe dans un intervalle de valeurs, par exemple $P(X \leqslant x)$ ou $P(a \leqslant X \leqslant b)$ d'où l'usage systématique de la fonction de répartition dans ce chapitre.
D'ailleurs dans le cas des variables à densité, nous verrons que pour tout réel $x, P(X = x) = 0$

2 Premières définitions et propriétés

Définitions et propriétés	**Exemples**
Définitions : soit X une variable aléatoire. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si sa fonction de répartition est • continue sur $\mathbb{R}$ • de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.	Exemple : si X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \end{cases}$ alors F est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[, [0, 1[$ et $[1, +\infty[$ et continue en 0 et 1 donc X est une variable à densité.

Dans la pratique, si on doit montrer qu'une variable aléatoire dont on connait la fonction de répartition (ou la donnée de $P(X \leqslant x)$) est à densité, il suffit de montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points.

Définition : soit X une variable à densité et F_X sa fonction de répartition. Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **positive**, coïncidant avec F_X' sauf en un nombre fini de points est appelée **densité de probabilité** associée à X

Propriétés : on a alors

- F_X est une primitive de f sur tout intervalle où f est continue
- toute densité f d'une variable à densité X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et valant $f(x) = F_X'(x)$ aux points où F_X est $\mathscr{C}^1$ est une densité de probabilité associée à X

Remarque : la fonction densité de probabilité illustre la probabilité de la variable aléatoire X (voir les courbes plus bas). Généralement les valeurs de f seront « localisées » sur un intervalle qui correspond à l'intervalle des valeurs les plus probables pour X, là où il y a le plus de « densité de probabilité ».

Exemple : avec l'exemple précédent

f définie par $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \end{cases}$

est une densité de probabilité associée à X

⚠ une densité de probabilité n'est pas unique pour une variable aléatoire, on peut même en définir une infinité (avec des points de discontinuités).

Propriété : soit X une variable à densité, f une densité de probabilité associée à X

si f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point, alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t}$$

et en particulier :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1} \qquad (= \lim_{x \to +\infty} F_X(x))$$

$$\boxed{F_X'(x) = f(x) \text{ aux points } x \text{ où } f \text{ est continue.}}$$

Remarque : cette propriété signifie que la donnée d'une densité de probabilité, **caractérise la loi** d'une variable à densité.

Exemple : avec l'exemple précédent

si $x < 0$ alors $f(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, x]$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$

si $x \in [0, 1]$ alors $f(t) = t$ pour $t \in [0, x]$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_{0}^{x} 1\mathrm{d}t = x$

de même si $x > 1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1$

on retrouve donc la fonction de répartition

Remarque : avec l'exemple ci-dessus, on voit que nous avons calculé l'intégrale d'une fonction non continue (ce que nous n'avons pas défini), ce qui sera fréquent dans ce chapitre. Dans la pratique, cela ne posera pas de problème car la fonction de répartition sera toujours continue.

Propriété - conditions suffisantes pour qu'une fonction soit une densité :

soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1

alors il existe une variable aléatoire X à densité admettant f pour densité.

Remarques : ces conditions permettent de vérifier les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition, f « presque continue » permet de définir une fonction F « presque $\mathscr{C}^1$ » vérifiant $F' = f$ « presque partout ». De plus f positive $\Rightarrow F$ croissante et enfin $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Dans la pratique, si on commence par nous donner un f, on montrera généralement que la fonction vérifie ces conditions puis on déterminera la fonction de répartition.

Corollaires : si une fonction f vérifie les conditions de la propriété précédente et admet une limite finie à gauche et à droite de ses éventuels points de discontinuité, avec X la variable aléatoire associée, alors

- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t}$
- pour $a \leqslant b$, $\boxed{P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f}$

  et $\boxed{P(X \geqslant b) = \displaystyle\int_b^{+\infty} f}$
- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad P(X = x) = 0}$
- $\boxed{P(X \leqslant x) = P(X < x)}$

  donc $\boxed{P(X \in [a,b]) = P(X \in]a,b[), \dots}$

« Démonstrations » : (presque toutes)

- découle des deux propriétés précédentes (f est alors une densité et admet des limites finies en tout point)
- $X \leqslant b = [X \leqslant a] \cup [a < X \leqslant b]$ donc (par incomp.) $P(X \leqslant b) = P(X \leqslant a) + P(a < x \leqslant b)$ i.e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f = \int_{-\infty}^{a} f + P(a \leqslant X \leqslant b)$ d'où le résultat car d'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^b f$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ $[X = x] \subset [x - \alpha < X \leqslant x]$ donc $0 \leqslant P(X = x) \leqslant P(x - \alpha < X \leqslant x)$ i.e. $0 \leqslant P(X = x) \leqslant F_X(x) - F_X(x - \alpha)$ d'où le résultat quand $\alpha \to 0$ par continuité de F_X
- découlent du résultat précédent, par exemple avec $(X \leqslant x) = (X < x) \cup (X = x)$ puis par incompatibilité

3 Moments d'une variable aléatoire à densité

Définitions :

- soit X une variable aléatoire à densité de densité f, on dit que X **admet une espérance** si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument ;

  et dans ce cas :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t}$$

- on dit qu'une variable aléatoire (à densité) est **centrée** si $E(X) = 0$
- on dit que X admet **un moment d'ordre** r ($r \in \{1;2\}$) si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument (c'est alors la valeur du moment)

Exemples :

- avec l'exemple précédent, comme la densité choisie est nulle en dehors de $[0,1]$, X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$
- la variable aléatoire associée à la densité

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

  n'admet pas d'espérance car $\displaystyle\int_1^A tf(t)\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ qui diverge

Remarque : l'espérance, définie ainsi, cherche toujours à illustrer la notion de moyenne. On doit donc trouver une valeur proche des abscisses des « pics » de la fonction densité.

Théorème de transfert : soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X, alors $Y = g(X)$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, et dans ce cas : $\boxed{E(g(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)\mathrm{d}t}$	Exemple : toujours avec l'exemple précédent, on pose $g(x) = x^2$ alors $E(g(X))$ converge car f est nulle en dehors de $[0, 1]$ et $E(g(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)f_X(t)\mathrm{d}t$ i.e. $E(X^2) = \displaystyle\int_0^1 t^2 \times 1\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Définition : soit une variable aléatoire à densité X de densité f admettant une espérance. Sous réserve de convergence de l'intégrale, • en notant $m = E(X)$, la **variance** de X est $V(X) = E((X - E(X))^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - m)^2 f(t)\mathrm{d}t$ • on dit que X est **centrée réduite** si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$ • $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé **l'écart-type de** X	Exemple : toujours avec le même avec la définition, la valeur de $E(X)$ et car f nulle en dehors de $[0, 1]$, X admet une variance et $V(X) = \displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \times 1\mathrm{d}t$ $= \left[\dfrac{1}{3}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{12}$

Propriété - formule de Kœnig-Huygens : une variable à densité X admet une variance si, et seulement si X admet un moment d'ordre 2, et dans ce cas : $\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$	Exemple : toujours avec le même d'après les résultats précédents (th. de transfert), X admet un moment d'ordre 2 donc $V(X) = \dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{12}$

4 Généralisation des propriétés

Cette section généralise des notions (définitions ou propriétés) qui ont été vues avec les variables aléatoires discrètes. Pour l'indépendance, c'est une définition plus large (nous avions vu que c'était équivalent à la définition donnée pour les variables aléatoires discrètes), pour le reste, cela permet d'étendre des propriétés au cas des variables à densité.

4.1 Indépendance de variables aléatoires réelles

Définition : soit X et Y sont deux variables aléatoires réelles,

on dit que X et Y sont **indépendantes** si, pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$,

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])\, P([Y \in J])$$

Définition - cas de n variables aléatoires :

on dit que n variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si, pour tous intervalles $I_1, \dots I_n$,

$$P([X_1 \in I_1] \cap \dots \cap [X_n \in I_n]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in I_i)$$

Définition - cas d'une suite de variables aléatoires :

si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires, on dit que les variables sont **(mutuellement) indépendantes** si $X_0, \dots X_n$ le sont, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Propriété - lemme des coalitions :
si $X_1, \dots, X_n$ sont n des variables aléatoires indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, \dots, X_p$ $(p < n)$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, \dots, X_n$

4.2 Propriétés de l'espérance

Dans ce paragraphe, X et Y désignent des variables aléatoires réelles quelconques.

Propriété - espérance d'une somme et linéarité : si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires réelles admettant une espérance, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une espérance et $\boxed{E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$

pour α, β réels, si X et Y admettent une espérance, alors $\alpha X + \beta Y$ admet une espérance et
$\boxed{E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)}$ et en particulier $\boxed{E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta}$

Propriété - croissance et positivité :
si X et Y admettent des espérances et si $P(X \leqslant Y) = 1$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$
en particulier, si $X \geqslant 0$, alors $E(X) \geqslant 0$

Exemple : si U et V sont deux variables aléatoires et $X = \min(U, V)$ et $Y = \max(U, V)$ alors « à coup sûr » $X \leqslant Y$ et donc si existence $E(X) \leqslant E(Y)$

Propriété - espérance d'un produit :
si $X_1, \dots X_n$ sont n variables aléatoires réelles **indépendantes** admettant une espérance, alors la variable aléatoire $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$ admet une espérance et $\boxed{E\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E(X_i)}$
en particulier si X et Y sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$

4.3 Propriétés de la variance

Dans ce paragraphe, X et Y désignent des variables aléatoires réelles quelconques.

Propriétés élémentaires : si X admet une variance,

- $\boxed{V(X) \geqslant 0}$ et $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = a) = 1$ où $a \in \mathbb{R}$
- pour α, β réels, alors $\alpha X + \beta$ admet une variance et : $\boxed{V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)}$
  en particulier, $V(X + \beta) = V(X)$

Propriété - variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes :
si $X_1, \dots X_n$ sont n variables aléatoires réelles **indépendantes** admettant une variance, alors la variable $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une variance et $\boxed{V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$
en particulier si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

5 Lois usuelles

5.1 Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$

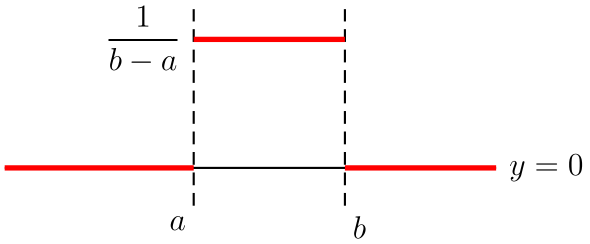
a, b réels, $a < b$. Remarque : $\mathcal{U}([a,b]) = \mathcal{U}(]a,b[)$

- Densité :

  L'idée de la loi uniforme est que la densité est constante sur $[a,b]$, nulle en dehors de $[a,b]$

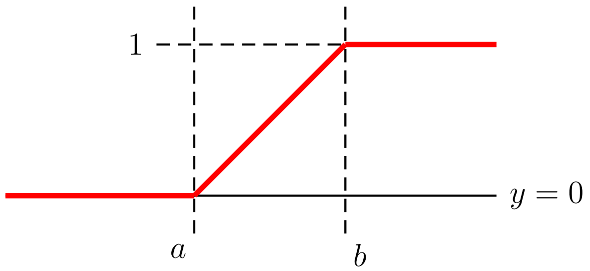
  La valeur de la constante est obtenue avec la relation $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 1$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$



- Fonction de répartition

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}}$$



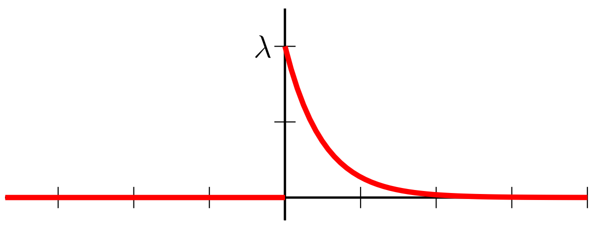
  Remarque : F est « affine par morceaux » et $F(a) = 0$ et $F(b) = 1$

- Espérance et variance : si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, $\boxed{E(X) = \dfrac{a+b}{2}}$ $\boxed{V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}}$

5.2 Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: $\mathcal{E}(\lambda)$

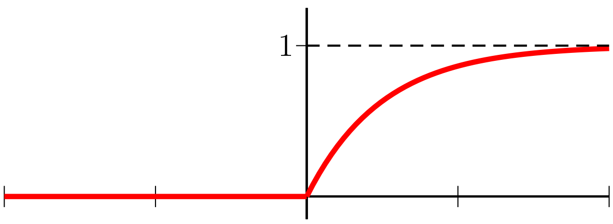
- Densité :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$



- Fonction de répartition

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$



  Remarque : si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $\boxed{\forall t > 0, \quad P(X > t) = e^{-\lambda t}} = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - F(t)$

- Espérance et variance : si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{\lambda}}$ $\boxed{V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}}$

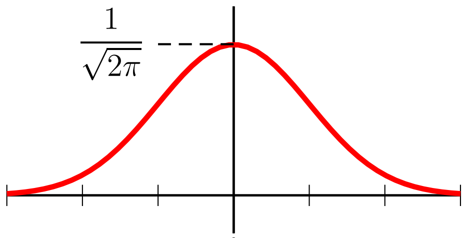
- Propriété d'absence de mémoire (on parle aussi de durée de vie sans vieillissement) :

  si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $\boxed{\forall t > 0,\ \forall x > 0, \quad P_{(X>x)}(X > x + t) = P(X > t)}$

5.3 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

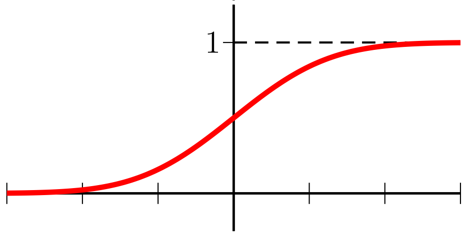
- Densité :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$



- Fonction de répartition :

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t}$$



Remarque : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$

- Espérance et variance : si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $\boxed{E(X) = 0}$ $\boxed{V(X) = 1}$

  La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est donc bien centrée et réduite.

- Relations remarquables : $\boxed{\Phi(0) = \frac{1}{2}}$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$

  Cela traduit la symétrie de la répartition des valeurs.

5.4 Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

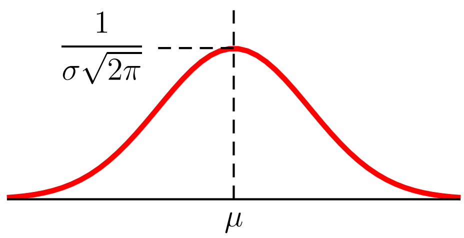
Cette loi vise à représenter des répartitions « normales » ou encore « naturelles » de valeurs.

- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

  où $\boxed{E(X) = \mu}$ $\boxed{V(X) = \sigma^2}$ $\boxed{\sigma(X) = \sigma}$

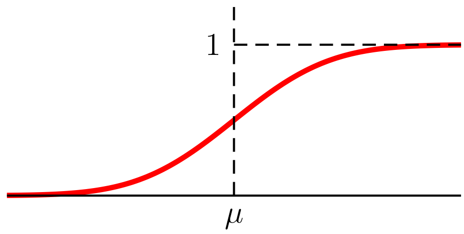
- Densité :

$$\boxed{f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$



- Fonction de répartition :

$$\boxed{\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(t) \mathrm{d}t}$$



Remarques :

- $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ est toujours une variable centrée réduite car par propriétés :
  $E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{\sigma}(E(X)-\mu)=0$ et $V\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{\sigma^2}V(X-\mu)=\dfrac{1}{\sigma^2}V(X)=1$
- le lien entre les fonctions de répartitions des loi normales $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ s'obtient par changement de variables dans l'intégrale (cf. transferts plus bas).
- pour la loi normale centrée et réduite, on peut être amené à utiliser des valeurs de $\Phi(x)$; on pourra alors utiliser la table donnée en annexe.

Propriété : une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit aussi une loi normale.	Remarque : on obtient alors l'espérance par linéarité, puis la variance grâce à la propriété dans le cas d'indépendance.

6 Transferts ou transformées de variables aléatoires

6.1 Cas général

On cherchera toujours à se ramener à la variable connue : si on note Y la nouvelle variable et X la variable « connue »

pour $y\in\mathbb{R}$, $\boxed{Y\leqslant y\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow X\leqslant\dots}$ ou $\boxed{\cdots\Leftrightarrow\cdots\leqslant X\leqslant\dots}$ ou $\boxed{\cdots\Leftrightarrow X\geqslant\dots}$

puis on passera à la fonction de répartition, en veillant aux intervalles de définition, et en utilisant notamment les propriétés :

$$\boxed{P(X\geqslant x)=1-F_X(x)}\quad\text{et}\quad\boxed{P(a\leqslant X\leqslant b)=F_X(b)-F_X(a)}$$

Exemples :

- soit U une variable aléatoire à densité telle que $\boxed{U\hookrightarrow\mathcal{U}([0,1])\text{ et on pose }Y=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)}$

soit $y\in\mathbb{R}$ alors (on utilise $\lambda>0$ et la croissance d'exponentielle et ln)

$Y\leqslant y\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)\leqslant y\Leftrightarrow-\ln(1-U)\leqslant\lambda y\Leftrightarrow\ln(1-U)\geqslant-\lambda y\Leftrightarrow1-U\geqslant e^{-\lambda y}\Leftrightarrow U\leqslant1-e^{-\lambda y}$

donc $P(Y\leqslant y)=P(U\leqslant1-e^{-\lambda y})$ i.e. $F_Y(y)=F_U(1-e^{-\lambda y})$

1er cas : $y\geqslant0$ alors $-\lambda y\leqslant0$ donc $0\leqslant e^{-\lambda y}\leqslant1$ donc $1\geqslant1-e^{-\lambda y}\leqslant0$

et donc $F_U(1-e^{-\lambda y})=1-e^{-\lambda y}$ car $F_U(x)=x$ si $x\in[0,1]$ i.e. $F_Y(y)=1-e^{-\lambda y}$

2ème cas : $y<0$ alors de même $1-e^{-\lambda y}<0$ et donc $F_U(1-e^{-\lambda y})=0$ i.e. $F_Y(y)=0$

finalement $F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad y<0\\ 1-e^{-\lambda y} & \text{si}\quad y\geqslant0\end{cases}$

on retrouve pour Y la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ donc $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$

- on définit maintenant $\boxed{Z=\dfrac{1}{Y}}$, alors $Z\geqslant0$ (i.e. $P(Z\leqslant z)=0$ pour $z\leqslant0$) puisque $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$

et pour $z>0, Z\leqslant z\Leftrightarrow\dfrac{1}{Y}\leqslant z\Leftrightarrow Y\geqslant\dfrac{1}{z}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$

donc $P(Z\leqslant z)=P\left(Y\geqslant\dfrac{1}{z}\right)=1-P\left(Y\leqslant\dfrac{1}{z}\right)$ i.e. $F_Z(z)=1-F_Y\left(\dfrac{1}{z}\right)=1-\left(1-e^{-\frac{\lambda}{z}}\right)=e^{-\frac{\lambda}{z}}$

finalement $F_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad z\leqslant0\\ e^{-\frac{\lambda}{z}} & \text{si}\quad z>0\end{cases}$

6.2 Transformée d'une loi uniforme

Propriété : si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \Leftrightarrow a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])}$	Exemple : si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ alors $2X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,2])$

Démonstration :

On pour $Y = a + (b-a)X$, alors pour $y \in \mathbb{R}, Y \leqslant y \Leftrightarrow a + (b-a)X \leqslant y \Leftrightarrow X \leqslant \dfrac{1}{b-a}(y-a)$

donc $F_Y(y) = F_X\left(\dfrac{1}{b-a}(y-a)\right)$ et donc si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ alors

1^er^ cas : si $y < a$ alors $\dfrac{1}{b-a}(y-a) < 0$ donc $F_X\left(\dfrac{y-a}{b-a}\right) = 0$ et donc $F_Y(y) = 0$

2^ème^ cas : $y \in [a,b]$ alors $0 \leqslant y - a \leqslant b - a$ donc $0 \leqslant \dfrac{y-a}{b-a} \leqslant 1$

donc $F_X\left(\dfrac{y-a}{b-a}\right) = \dfrac{y-a}{b-a}$ et donc $F_Y(y) = \dfrac{y-a}{b-a}$

3^ème^ cas : $y > b$ alors $\dfrac{y-a}{b-a} < 1$ donc $F_X\left(\dfrac{y-a}{b-a}\right) = 1$ et donc $F_Y(y) = 1$

finalement $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < a \\ \dfrac{y-a}{b-a} & \text{si} \quad y \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad y > b \end{cases}$ donc $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

et on montre de manière analogue la réciproque

6.3 Transformée d'une loi normale

Propriété : si $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)}$	Remarque : on peut retrouver les paramètres de la nouvelle loi avec les propriétés de la variance et de l'espérance Exemple : avec $a = \dfrac{1}{\sigma}$ et $b = -\dfrac{\mu}{\sigma}$ on retrouve $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Démonstration : on suppose $a > 0$ ici pour simplifier le changement de variable

soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y = aX + b$

alors pour $y \in \mathbb{R}, Y \leqslant y \Leftrightarrow aX + b \leqslant y \Leftrightarrow X \leqslant \dfrac{y-b}{a}$

donc $F_Y(y) = F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \exp\left(-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}t$

donc par changement de variable $u = at + b \Leftrightarrow t = \dfrac{u-b}{a}$ alors $t \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty$ (car $a > 0$) et $t = \dfrac{y-b}{a} \Rightarrow u = y$ et enfin $\mathrm{d}t \to \dfrac{1}{a}\mathrm{d}u$

d'où $F_Y(y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(\dfrac{u-b}{a} - \mu\right)^2\right) \dfrac{1}{a}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\dfrac{(u-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}\right) \mathrm{d}u$

on reconnait la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ donc $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

on montre de manière analogue la réciproque

Annexe : table des valeurs de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

La table ci-dessous comporte les valeurs approchées de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire les valeurs de :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$$

par exemple $\Phi(0,67) \approx 0,7486$ i.e. $P(X \leqslant 0,67) \approx 0,7486$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Remarques :

- on notera les valeurs remarquables : $\Phi(1,96) \approx 0,975$ et $\Phi(1,64) \approx 0,95$
- on ne donne que les valeurs positives car on retrouve les valeurs négatives à l'aide de la relation