Densité, espérance, variance et quelques opérations

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x^3 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

1. Montrer que X est une variable à densité et définir une densité f pour X
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 2

Soit $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$

1. Représenter f
2. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X
3. Déterminer sa fonction de répartition notée F_X

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ converge et cacluler sa valeur.

   On pose, dans la suite, $f(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ si $x \geqslant 1$ et $f(x) = 0$ si $x < 1$
2. **a.** Représenter graphiquement f

   b. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. On considère une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité.

   a. Déterminer la fonction de répartition F_X de X

   b. La variable X admet-elle une espérance ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Z
2. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z
3. Justifier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} \mathrm{d}t$

   La calculer en effectuant le changement de variable $u = t + 1$
4. Prouver que Z admet une espérance et la déterminer.
5. Z admet-elle une variance ?

Exercice 5 (Edhec)

On pose pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-|x|}$ si $x \in [-\ln(2), \ln(2)]$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f

a. Déterminer la fonction de répartition F de X

b. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

c. On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y

Exercice 6 - densité, opérations sur les variables aléatoires

On pose $f(x) = \lambda(1-x)$ pour $x \in]0,1[$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$, où λ désigne un réel.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

2. En déduire la valeur de λ pour que f soit une densité de probabilité.
On conservera cette valeur pour λ pour la suite de l'exercice.

3. Si X est une variable aléatoire de densité f, déterminer sa fonction de répartition F_X, son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$

4. Pour chacune des variables suivantes, montrer qu'elle est à densité et en déterminer la fonction de répartition ainsi qu'une densité :

$$Y_1 = 1 + X, \quad Y_2 = 1 - X, \quad Y_3 = \sqrt{X}, \quad Y_4 = \ln(X), \quad Y_5 = X^2, \quad Y_6 = \exp(X)$$

Autres exemples de lois

Exercice 7 - Loi de Pareto

Pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, on pose : $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{n}{t^{n+1}} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

1. Montrer que f_n définit une densité de probabilité.

2. Montrer que, si X_n est de densité $f_n, \forall x \geqslant 1, \quad P(X_n > x) = \dfrac{1}{x^n}$

3. Déterminer une condition sur n pour que X_n admette une espérance et préciser $E(X_n)$ dans ce cas.

Exercice 8 - loi Gamma (Essec - HEC)

On pose , pour $\alpha > 1 : \Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, et $f_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

1. Vérifier que $\Gamma(\alpha)$ est bien définie pour $\alpha \geqslant 1$

2. Vérifier que f_α est une densité de probabilité, pour $\alpha \geqslant 1$

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha \geqslant 1$.

4. Montrer que, si X est de densité f_α, X admet une variance et :

$$E(X) = \alpha \qquad \text{et} \qquad V(X) = \alpha$$

Exercice 9 (*difficile*)

Soit X une variable à densité de densité f vérifiant : $f(t)=0$ pour $t \leqslant 0$, et f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant une limite finie en 0^+

Soit F la fonction de répartition de X. On note $R(x)=1-F(x)$ pour $x \geqslant 0$

1. Montrer que, pour $A>0$, $\displaystyle\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t + AR(A) = \int_0^A R(t)\mathrm{d}t$

2. On suppose dans cette question que $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$ converge.

- **a.** Vérifier que : $\forall A>0, \quad \displaystyle\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$
- **b.** En déduire que :
  - i. X admet une espérance
  - ii. $E(X) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$
  - iii. $xR(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

3. On suppose dans cette question que X admet une espérance.

- **a.** Justifier que : $\forall A>0, \quad \displaystyle\int_A^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \geqslant AR(A) \geqslant 0$
- **b.** En déduire que : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} AR(A)=0$, puis que $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$

4. Déduire des deux questions précédentes que X admet une espérance si, et seulement si : $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$ converge et dans ce cas : $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}(1-F(t))\mathrm{d}t$

Opérations sur les variables aléatoires (et simulation Python)

Exercice 10 - transformations affines (classique)

On considère une variable aléatoire réelle X

1. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$
Déterminer la fonction de répartition de $Y=3X-2$. Est-ce que Y est une variable à densité ?

2. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre 3
Déterminer la fonction de répartition de $Y=2X+1$. Est-ce que Y est une variable à densité ?

3. On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$
On pose $Y=aX+b$ où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$. Justifier que Y admet une espérance et une variance et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$
Quelle loi suit la variable Y ?

Exercice 11 - fonction de répartition de X^2 (classique)

Déterminer la fonction de répartition de X^2, et vérifier que X^2 est à densité dans les cas suivants :

1. X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([-1,1])$,

2. X suit la loi exponentielle de paramètre 1

Exercice 12 - fonction de répartition d'un minimum, d'un maximum

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y et on pose $U = \min(X,Y)$, $V = \max(X,Y)$.

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$: $[U \geqslant a] = [X \geqslant a] \cap [Y \geqslant a]$ et $[V \leqslant a] = [X \leqslant a] \cap [Y \leqslant a]$

1. On suppose dans cette question que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ avec $\lambda > 0, \mu > 0$
Déterminer les fonctions de répartition de U et de V. Ces variables sont-elles à densité ?

2. On suppose dans cette question que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$
Déterminer les fonctions de répartition de U et de V. Ces variables sont-elles à densité ?

Exercice 13 - fonction de répartition et simulation Python : méthode d'inversion

Les questions **1.**, **2.** et **3.** sont indépendantes

1. On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$. On pose $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$, avec $\lambda > 0$
Montrer que Y suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$

2. (HEC) Plus généralement, on suppose que f est une densité vérifiant $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et f est nulle sur $\mathbb{R}_-$

- **a.** Justifier que la fonction de répartition F associée à f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[0,1[$
On note G la fonction réciproque de cette fonction, c'est-à-dire la fonction définie sur $[0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et vérifiant :
$$\forall y \in [0,1[, \quad F(G(y)) = y$$
- **b.** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1[$. Montrer que $Y = G(X)$ a pour fonction de répartition F

3. Application (tous concours)

On pose $f(t) = 2te^{-t^2}$ pour $t > 0$, et $f(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$

- **a.** Vérifier que f est une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire de densité f
- **b.** Déterminer $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis $G(y) = F^{-1}(y)$ pour $y \in [0,1[$
- **c.** Ecrire un code Python permettant de simuler la loi de X

Avec des lois usuelles

Exercice 14 - (classique)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\lambda_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x$

1. Convergence de λ_n

- **a.** Justifier que λ_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$
- **b.** Déterminer la valeur de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. On pourra se référer à des résultats connus sur la loi exponentielle.
- **c.** En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $\lambda_{n+1} = (n+1)\lambda_n$
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = n!$

Dans la suite, on pose : $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}x^n e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

2. Montrer que f_n est une densité de probabilité.

3. Si X_n est une variable aléatoire de densité f_n, déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ en fonction de n

Exercice 15 - classique (EML et Edhec, loi normale)

Soit $\lambda > 0$. On pose $f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Si X est une variable aléatoire de densité f, déterminer sa fonction de répartition notée F_X

3. **a.** Déterminer le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{2\lambda}\right)$

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x$

c. En déduire que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$

4. Soit $Y = \lambda X^2$. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1
Rappeler la valeur de $E(Y)$ puis en déduire que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{(4-\pi)}{4\lambda}$

Exercice 16 (Ecricome, loi uniforme)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([0,1])$, uniforme sur $[0,1]$
On note F la fonction de répartition associée à cette loi.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \max(X_1, \dots X_n)$ et on note F_n sa fonction de répartition.

1. Montrer que, pour $z \in \mathbb{R}$, $F_n(z) = F(z)^n$

2. En déduire que Z_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité f_n

3. Montrer que Z_n admet une espérance et une variance, et les calculer.

Exercice 17 - loi de Pareto (classique, EML, Edhec, Ecricome)

Soit a, b deux réels strictement positifs, et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{ab^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

Dans la suite, on dira d'une variable aléatoire de densité $f_{a,b}$ qu'elle suit la **loi de Pareto** $\mathcal{P}(a,b)$ **de paramètres** (a,b)
On considère dans la suite une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto $\mathcal{P}(a,b)$

2. Déterminer la fonction de répartition, notée $F_{a,b}$, de X

3. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si : $a > 1$ et, dans ce cas : $E(X) = \dfrac{ab}{a-1}$

4. Montrer que X admet une variance si, et seulement si : $a > 2$ et, dans ce cas : $V(X) = \dfrac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$

5. Simulation informatique.

a. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1[)$
Montrer que $bU^{-1/a}$ suit la loi de Pareto $\mathcal{P}(a,b)$

b. En déduire une fonction `Python` d'en tête `def Pareto(a, b):` permettant de simuler une réalisation de la loi de pareto $\mathcal{P}(a,b)$

Exercice 18 - loi logistique standard et opérations sur les variables aléatoires (classique)

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

1. Etudier les variations de F et préciser ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$
Justifier que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, dont on précisera une densité f (on montrera que F vérifie les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition).
La loi de X est appelée *loi logistique standard.*
2. On considère une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 1, et on pose $W = \ln(\exp(T) - 1)$
   - **a.** Rappeler la fonction de répartition F_T de T
   - **b.** Montrer que W suit la loi logistique standard.
3. On considère une variable aléatoire U à densité suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$
   - **a.** Montrer que $V = -\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1
   - **b.** Déduire de la question **2.b.** que $Y = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ suit la loi logistique standard.
   - **c.** En déduire une instruction Python (en une ligne) permettant de simuler la loi logistique standard.
4. On suppose que X_1 et X_2 sont deux variables indépendantes de même loi que X (loi logistique standard). On note $M = \max(X_1, X_2)$
Montrer que M est une variable à densité, et déterminer une densité associée.
5. On pose $Z = |X|$ avec toujours X suivant la loi logistique standard, de fonction de répartition $F_X = F$
On note F_Z la fonction de répartition de la variable aléatoire Z
   - **a.** Soit $x \geqslant 0$. Exprimer $P[Z \leqslant x]$ à l'aide de F et de x
   - **b.** En déduire que Z est une variable à densité et déterminer une densité associée.

Quelques extraits d'annales

Exercice 19 (Ecricome) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. **Etude de la fonction g**
   - **a.** Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
   - **b.** Donner le tableau des variations de g sur $[0, +\infty[$. On précisera la limite de g en $+\infty$
   - **c.** Etudier la convexité de g
2. **Etude de variables aléatoires**
   - **a.** Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.
   On notera Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G
   - **b.** Sans calcul, montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
   - **c.** Montrer que, pour tout réel x, $\quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
   - **d.** Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.
3. On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$
   - **a.** Déterminer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z

b. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité de Z

c. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

Exercice 20 (Edhec)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$
On suppose que :
- X est une variable à densité,
- la loi de Y est donnée par : $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$

On rappelle que l'indépendance de X et Y se traduit par les égalités vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P\left([X \leqslant x] \cap [Y = 1]\right) = P(X \leqslant x)P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P\left([X \leqslant x] \cap [Y = -1]\right) = P(X \leqslant x)P(Y = -1)$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est une variable aléatoire sur le même espace probabilisé.
Pour une variable aléatoire A, on notera F_A sa fonction de répartition.

1. En utilisant le système complet d'événement $\{[Y = 1], [Y = -1]\}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right)$$

En déduire que Z est une variable aléatoire à densité, et exprimer une densité f_Z de la loi de Z en fonction d'une densité f_X de la loi de X

2. On suppose que X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que Z suit aussi la loi normale centrée réduite.

3. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$

a. Rappeler l'expression de $F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et donner une densité f_X de la loi de X

b. Montrer que Z suit une loi uniforme que l'on précisera.

4. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1

a. Rappeler l'expression de $F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et donner une densité f_X de la loi de X

b. Calculer $E(Z)$

c. Exprimer Z^2 en fonction de X. En déduire que Z admet une variance et calculer $V(Z)$

d. Montrer que la loi de Z a pour densité f_Z définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

e. Rappeler les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$
En déduire successivement les valeurs des l'intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} \mathrm{d}x$
Retrouver alors la valeur de $\mathbf{V}(Z)$ par un autre calcul que celui fait dans la question **4.c.**.

Exercice 21 (Ecricome)

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \leqslant -1 \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f est paire.

2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

3. **a.** A l'aide d'un changement de variable, montrer que :

pour tout réel $A > 1$: $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt = \int_1^A f(u)\ du$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

b. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X

a. Montrer que, pour tout réel x : $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

b. Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$

a. Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b. Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par : $f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y

Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$

a. Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D

b. Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

c. Montrer que pour tout réel x : $P(T \leqslant x) = \dfrac{1}{2}P(Y \leqslant x) + \dfrac{1}{2}P(Y \geqslant -x)$

d. En déduire la fonction de répartition de T

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$ et V la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$

a. Rappeler la fonction de répartition de U

b. Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variable V et Y suivent la même loi.

8. Ecrire une fonction en langage `Python`, d'en-tête `def T(n)`, qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire T