Variables aléatoires à densité

Information préalable : on ne montrera pas qu'une variable est une variable aléatoire et on ne montrera pas qu'une fonction est une fonction de répartition (on l'admettra et on montrera seulement qu'il s'agit d'une variable à densité).

- une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- une densité est une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, positive et qui coïncide avec F_X' sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- conditions suffisantes pour qu'une fonction soit une densité de probabilité : positivité, continuité (sauf éventuellement en un nombre fini de points) et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$;
- si f est une densité (et admet une limite finie à gauche et à droite en ses points de discontinuité), alors $P(X \leqslant x) = F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$;
- liens entre $P(X \leqslant x), P(X \geqslant x), P(a \leqslant X \leqslant b)$ et la fonction de répartion ou l'intégrale de f correspondante ;
- espérance, transfert, variance, moments d'ordre 1 et 2 : existence et calculs pratiques ;
- généralisation des propriétés des variables aléatoires au cas des variables aléatoires à densité : linéarité de l'espérance, indépendance et propriétés, lemme des coalitions... ;
- loi usuelles :
  - ▷ loi uniforme : fonction de répartition, densité, espérance, variance ;
  - ▷ loi exponentielle : fonction de répartition, densité, espérance, variance. Propriété d'absence de mémoire ;
  - ▷ les lois normales : fonction de répartition (dont propriété $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$), densité, paramètres, somme de deux variables indépendantes suivant des lois normales ;
- opérations sur les variables à densité : propriétés pour les transformées affines de variables suivant des lois uniforme ou normale ; autres cas (calculs et méthodes classiques).