ECG 2 - mathématiques appliquées **Devoir en temps libre n°6** Pour le 19 janvier 2026

Corrigé *Total sur 19 points*

Exercice 1

On désigne par λ un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda|x|e^{-\lambda x^2}$$

1. **a.** Montrer que f est paire. *0,5 point*

f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0

et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \lambda|-x|e^{-\lambda(-x)^2} f(x) = \lambda|x|e^{-\lambda x^2} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

b. Etablir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur. *1,5 points*

Soit $A > 0$, alors $\displaystyle\int_0^A f(x)\mathrm{d}x = \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}e^{-\lambda x^2}\right]_0^A = \frac{1 - e^{-\lambda A^2}}{2}$

or $\displaystyle\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ et (car $\lambda > 0$) $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} -\lambda A^2 = -\infty$ donc par composition $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} e^{-\lambda A^2} = 0$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et par opérations $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}}$

c. Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. *2 pts*

f est positive (produit de termes positifs) et continue sur $\mathbb{R}$ (produit et composition de fonctions continues)

de plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et, par parité, on comprend que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

on va le montrer à l'aide du changement de variable $t = -x$ (affine donc on peut l'appliquer à une intégrale généralisée) :

alors $x = 0 \Rightarrow t = 0$ et $x \to +\infty \Rightarrow t \to -\infty$ et $\mathrm{d}x \to -\mathrm{d}t$

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{-\infty} f(-t)(-\mathrm{d}t) = -\int_0^{-\infty} f(t)\mathrm{d}t$ car f est paire

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

donc $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

2. Montrer que la fonction de répartition F_X de X s'écrit : *2 points*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda x^2}}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-\lambda x^2}}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

f est une densité de X (et admet des limites finies à droite et à gauche en tout point) donc $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

<u>1er cas</u> : pour $x < 0$, alors pour $t \in]-\infty, x], t < 0$ donc $|t| = -t$ et donc

$F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} -\lambda t e^{-\lambda t^2}\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty}\left[\frac{e^{-\lambda t^2}}{2}\right]_A^x = \frac{e^{-\lambda x^2}}{2}$ (cf. limite au **1.b.**)

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : pour $x > 0$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ par relation de Chasles

d'une part, d'après **1.c.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

d'autre part : $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} \lambda t e^{-\lambda t^2}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-\lambda t^2}}{2}\right]_0^2 = \frac{-e^{-\lambda x^2}+1}{2}$, donc : $F_X(x) = 1 - \dfrac{e^{-\lambda x^2}}{2}$

finalement, $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda x^2}}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-\lambda x^2}}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$

3. **a.** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ *2 points*

La fonction $h : x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive

de plus $h(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ car $\dfrac{h(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^2 h(x) = x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2)^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}$

or $X^2 e^{-\frac{1}{2}X} \underset{X\to+\infty}{=} 0$ par croissances comparées et, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^2)^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$ i.e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$

par ailleurs, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha > 1$)

donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives,

$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ converge donc par relation de Chasles $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ converge

et enfin par linéarité, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ converge i.e. $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x \text{ converge}}$

b. En déduire que X admet une espérance et que : $\mathrm{E}(X) = 0$ *2 points*

Avec le changement de variable $t = -x$, alors comme plus haut et car f est paire :

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{-\infty} (-t)f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{-\infty} t f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$

de fait $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ convergent donc X admet une espérance et

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ par définition

donc $E(X) = -\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ donc $\boxed{E(X) = 0}$

Nota bene : pour bien faire il faudrait montrer la convergence absolue de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\mathrm{d}x$ soit la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |x f(x)|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} |x| f(x)\mathrm{d}x$ qui est égale à $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ par parité de $x \mapsto |x| f(x)$

<u>Remarque</u> : dès lors que la densité est une fonction paire, et que X admet une espérance,

on obtient toujours $E(X) = 0$ par le même procédé.

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

a. Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X *1,5 points*

Soit $y \in \mathbb{R}$
<u>1^er cas</u> : si $y < 0$ alors $P(Y \leqslant y) = 0$ car $Y = X^2$ et donc $Y \geqslant 0$
<u>2^ème cas</u> : si $y \geqslant 0$
alors $Y \leqslant y \Leftrightarrow X^2 \leqslant y \Leftrightarrow \sqrt{X^2} \leqslant \sqrt{y} \Leftrightarrow |X| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant X \leqslant y$
par croissance des fonction carré et racine sur $\mathbb{R}_+$ et car $y \geqslant 0$
donc $P(Y \leqslant y) = P(-y \leqslant X \leqslant y)$ i.e. $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ par définition et propriété de la fonction de répartition

d'où finalement $\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}}$

<u>Remarque</u> : en fait il serait plus simple d'expliciter F_Y et de reconnaitre la loi exponentielle à ce stade, mais l'énoncé préfère compliquer les choses ici.

b. Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ *2 points*

$\forall y < 0, F_Y'(y) = 0$ et $\forall y > 0, F_Y(y) = F_X(u(y)) - F_X(-u(y))$ où $u(y) = \sqrt{y}$
donc F_Y dérivable sur $]0, +\infty[$ et (attention à la dérivée d'une composée) :
$\forall y > 0, F_Y'(y) = u'(y)F_X'(u(y)) - (-u'(y)F_X'(-u(y)))$
or $u'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ et $F_X' = f$ sur $\mathbb{R}$ donc $F_Y'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}f(\sqrt{y}) + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}f(-\sqrt{y})$
et comme f est paire : $f(\sqrt{y}) = f(-\sqrt{y})$
donc $F_Y'(y) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{y}}f(\sqrt{y}) = \dfrac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \dfrac{\lambda\sqrt{y}e^{-\lambda(\sqrt{y})^2}}{\sqrt{y}} = \lambda e^{-\lambda y}$

finalement f_Y définie par $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ e^{-\lambda y} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases} \text{ est une densité de } Y}$

car elle est définie et positive sur $\mathbb{R}$ et elle coïncide avec F_Y' sauf éventuellement en 0
or c'est la densité de la loi exponentielle de paramètre λ donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$

<u>Remarque</u> :le fait que Y soit à densité n'est pas demandé ici, mais on peut le vérifier : F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ (car de densité f continue) sur $\mathbb{R}$, donc F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur R_+^* et sur R^*. D'autre part, $\lim\limits_{y\to 0+} F_Y(y) = F_X(0) - F_X(0) = 0 = \lim\limits_{y \to 0-} F_Y(y) = F_Y(0)$, donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$

c. En déduire que X admet une variance et calculer la valeur de $V(X)$ *1 point*

$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc par propriété Y admet une espérance et $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $Y = X^2$
donc X^2 admet une espérance, i.e. X admet un moment d'ordre 2, et $E(X^2) = \dfrac{1}{\lambda}$
donc d'après la formule de Kœnig - Huygens X admet une variance et

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{1}{\lambda} - 0^2$ d'après **3.b.** donc $\boxed{V(X) = \dfrac{1}{\lambda}}$

5. Loi d'un maximum.

Dans cette question, on suppose que $\lambda = 1$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots X_n$ de même loi que X et on pose $Z_n = \max(X_1, \dots X_n)$

a. Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}, [Z_n \leqslant x]$ en fonction des événements $[X_i \leqslant x]$ pour $i \in \{1, \dots n\}$. En déduire une expression de la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n *2 points*

Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\max(X_1, \dots X_n) \leqslant x \Leftrightarrow X_1 \leqslant x$ et $\dots$ et $X_n \leqslant x$

alors $\boxed{[Z_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]}$ et donc $P(Z_n \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right)$

et on en déduit, par indépendance : $P(Z_n \leqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x)$

i.e. $F_{Z_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x)$ car $\forall i \in [\![1, n]\!], X_i$ suit la même loi que X

et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(x) = (F_X(x))^n$

d'où d'après la question **2.** : $\boxed{F_{Z_n}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{-x^2}}{2}\right)^n = \dfrac{e^{-nx^2}}{2^n} & \text{si } x < 0 \\ \left(1 - \dfrac{e^{-x^2}}{2}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$

b. Montrer que Z_n est une variable à densité et en préciser une densité. *2,5 points*

Option A (plus simple) : F_{Z_n} hérite des propriétés de F_X car X est à densité et $F_{Z_n} = F_X^n$

Option B : F_{Z_n} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ par opérations et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$ (exponentionnelle et fonctions polynomiales)

de plus en 0, par continuité des expression sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$:

$\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{e^{-nx^2}}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$ et $\lim\limits_{x \to 0+} \left(1 - \dfrac{e^{-x^2}}{2}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$

donc $\lim\limits_{x \to 0+} F_{Z_n}(x) = F_{Z_n}(0) = \lim\limits_{x \to 0-} F_{Z_n}(x)$ i.e.F_{Z_n} est continue en 0

finalement F_{Z_n} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc $\boxed{Z_n \text{ est une variable à densité}}$

de plus $\forall x < 0, F_{Z_n}(x) = (v(x))^n$ et $\forall x \geqslant 0, F_{Z_n}(x) = (1 - v(x))^n$ où $v(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2}$

donc $\forall x < 0, F'_{Z_n}(x) = nv'(x)(v(x))^{n-1}$

$$= n\left(-2x\frac{e^{-x^2}}{2}\right)\left(\frac{e^{-x^2}}{2}\right)^{n-1} = -2nx\left(\frac{e^{-x^2}}{2}\right)^n = \frac{-2nxe^{-nx^2}}{2^n}$$

et $\forall x \geqslant 0, F_{Z_n}(x) = n(-v'(x))(1 - v(x))^{n-1}$

$$= n\left(2x\frac{e^{-x^2}}{2}\right)\left(1 - \frac{e^{-x^2}}{2}\right)^{n-1} = nxe^{-x^2}\left(1 - \frac{e^{-x^2}}{2}\right)^{n-1}$$

finalement $\boxed{f_{Z_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{-nxe^{-nx^2}}{2^{n-1}} & \text{si } x < 0 \\ nxe^{-x^2}\left(1 - \dfrac{e^{-x^2}}{2}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{est une densité de } Z_n}$

car elle est définie et positive sur $\mathbb{R}$ et elle coïncide avec F'_{Z_n} sauf éventuellement en 0