Partie I. Loi exponentielle

1. **a.** La densité d'une loi $\varepsilon(1)$ est $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $\mathbb{R}^-$ donc

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1}$

On peut le démontrer par récurrence (mais cela est plutôt l'objet de la question suivante)
Astuce : $t^n e^{-t} = t^n e^{-t/2} e^{-t/2}$ avec $t^n e^{-t/2} = t^n / e^{t/2} \to 0$ quand $t \to +\infty$ ($t^n = o\left(e^{t/2}\right)$)
donc $t^n e^{-t} = o\left(e^{-t/2}\right)$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, donc par majoration de fonctions positives,

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ converge également}}$

On pose alors $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ et,.pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

b. Soit $M \geqslant 0$ alors $\int_0^M t^n e^{-t} dt = \cdots$

Soient $u(t) = t^n$: $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$: $v(t) = -e^{-t}$ avec u et v C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\int_0^M t^n e^{-t} dt = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^M - \int_0^M -nt^{n-1} e^{-t} dt = -M^n e^{-M} + n \int_0^M t^{n-1} e^{-t} dt$$

$$\to nI_{n-1} \text{ quand } M \to +\infty$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : I_n = nI_{n-1}}$

Et comme de plus $I_0 = 1$, on reconnaît alors la suite factorielle

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : I_n = n!}$

Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$).
on pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Si $X_1 \geqslant X_2$ alors $Y = X_1 - X_2$, $T = X_1$ et $Z = X_2$ donc $|X_1 - X_2| = X_1 - X_2$
et donc$T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.
Et de même si $X_1 \leqslant X_2$ où $|X_1 - X_2| = X_2 - X_1$

3. **a.** Comme $X_1 \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ on a $V(X_1) = 1/\lambda^2$ et $P([X_1 \leqslant x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b. On a donc $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_1) = 2/\lambda$
et $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2/\lambda^2$ par indépendance.
et de même, $E(Y) = E(X_1 - X_2) = 0$ et $V(Y) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = 2/\lambda^2$.

4. F_Z est la fonction de répartition de Z.
Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $(Z \leqslant z) = (\min(X_1, X_2) \leqslant z)$ n'est pas simple à traduire.
$(Z > z) = (\min(X_1, X_2) > z) = (X_1 > z \cap X_2 > z)$ indépendants donc
$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \leqslant z) = 1 - \mathrm{P}(\min(X_1, X_2) > z) = 1 - \mathrm{P}(X_1 \leqslant z) \mathrm{P}(X_2 \leqslant z)$ par indépendance

donc $F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \left(e^{-\lambda z}\right)^2 & \text{si } z \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$

et comme $1 - \left(e^{-\lambda z}\right)^2 = 1 - e^{-2\lambda z}$, on reconnaît la fonction de répartition de $\varepsilon(2\lambda)$

Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \varepsilon(2\lambda),\ E(Z) = \frac{1}{2\lambda} \text{ et } V(Z) = \frac{1}{4\lambda^2}}$

5. **a.** $(T \leqslant t) = (\max(X_1, X_2) \leqslant t) = (X_1 \leqslant t \cap X_2 \leqslant t)$ indépendants donc

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathrm{P}(X_1 \leqslant t)\,\mathrm{P}(X_2 \leqslant t) \text{ par indépendance} \\ &= \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction F_T est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $[0, +\infty[$

En 0^- : $F_T(t) = 0 \to 0 = F_T(0)$ donc F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc T est à densité et une densité de T est $f_T(t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$

b. On a

$$\begin{aligned} \int_0^M t f_T(t)\,dt &= \int_0^M t 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) dt \\ &= \left(2\int_0^M t\lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^M t 2\lambda e^{-2\lambda t} dt\right) \\ &\to \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} \text{ quand } M \to +\infty \end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$ (espérance de $\varepsilon(\lambda)$)

Conclusion : $\boxed{T \text{ a une espérance et } E(T) = \frac{3}{2\lambda}}$

Et pour l'espérance de T^2 :

Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ donc $E\left(X^2\right) = V(X) + E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^M t^2 f_T(t)\,dt &= \int_0^M t^2 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) dt \\ &= \left(2\int_0^M t^2\lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^M t^2 2\lambda e^{-2\lambda t} dt\right) \\ &\to \frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{4\lambda^2} = \frac{7}{2\lambda^2} \text{ quand } M \to +\infty \end{aligned}$$

Donc T^2 a une espérance et $E\left(T^2\right) = \frac{7}{2\lambda^2}$ donc T a une variance et

Conclusion : $\boxed{V(T) = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}}$

N.B. cela permet de valider la loi de T

Ou bien, en suivant le conseil donné, avec le changement de variable $x = \lambda t$ ou plus simplement $t = x/\lambda$
$dt = dt/\lambda$ et $t = 0$ pour $x = 0$ et $t = M$ pour $x = \lambda M$

$$\int_0^M t\lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\lambda M} \frac{x}{\lambda} e^{-x} dx$$
$$\to \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda} I_1 = \frac{1}{\lambda}$$

6. On a $X_1 + X_2 = Z + T$ et comme $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ par indépendance, et que $V(Z+T) = V(Z) + V(T) + 2\operatorname{cov}(Z,T)$ alors
$\operatorname{cov}(Z,T) = \frac{1}{2}[V(Z+T) - V(Z) - V(T)] = \frac{1}{2}[V(X_1) + V(X_2) - V(Z) - V(T)]$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{5}{4\lambda^2}\right] = \frac{1}{4\lambda^2}$
et donc, le coefficient de corrélation linéaire est :
$r = \dfrac{\operatorname{cov}(Z,T)}{\sqrt{V(Z)V(T)}} = \dfrac{\frac{1}{4\lambda^2}}{\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}\frac{5}{4\lambda^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

7. **a.** Comme $Y = X_1 - X_2$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{R}$ et $|Y|(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-X_2}(x) = \mathrm{P}(-X_2 \leqslant x) = \mathrm{P}(X_2 \geqslant -x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]-\infty, 0]$et $]0, +\infty[$ et en 0^+ : $F_{-X_2}(x) = 1 \to 1 = F(0)$ et elle est C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Donc $-X_2$ est bien à densité et une densité est $f_{-X_2}(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c. Si $y \geqslant 0$ on a $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geqslant y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$ donc, pour $t \geqslant y$:

$$f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) = \lambda e^{\lambda(y-t)} \lambda e^{-\lambda t}$$
$$= \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t}$$

donc

$$\int_y^M f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\, dt = \lambda^2 e^{\lambda y} \int_y^M e^{-2\lambda t} dt$$
$$= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{-2\lambda}\left[e^{-2\lambda M} - e^{-2\lambda y}\right]$$
$$\to \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} \text{ quand } \to +\infty$$

Donc, pour $y \geqslant 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\, dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}$

Pour $y < 0$: $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geqslant y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$

donc $f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t) \begin{cases} \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ et

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt = \lambda^2 e^{\lambda y} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt = \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$

et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt$ converge et vaut $\dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } y\text{, l'intégrale } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt \text{ est convergente et vaut } \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}}$

d. Soit $f(y) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ pour tout y réel.

f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{2}$

(par densité de $\varepsilon(1)$) et comme f est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(y)\, dy = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy = 1$

Conclusion : $\boxed{y \to \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} \text{ est une densité de probabilité : celle de } Y}$

e. On détermine la fonction de répartition $F_{|Y|}$:

Pour tout $y < 0$: $\mathrm{P}(|Y| \leqslant y) = 0$ (événement impossible)

et pour $y \geqslant 0$: $\mathrm{P}(|Y| \leqslant y) = \mathrm{P}(-y \leqslant Y \leqslant y) = F_Y(y) - F_Y(-y)$ car $-y \leqslant y$.

Comme Y est à densité, F_Y est continue et C^1sur $\mathbb{R}$ (car f_Y est continue sur $\mathbb{R}$), alors $F_{|Y|}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$

De plus $F_{|Y|}(0) = F_Y(0) - F_Y(0) = 0$ et pour $y < 0$: $F_{|Y|}(y) = 0 \to 0 = F_{|Y|}(0)$ donc $F_{|Y|}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc $|Y|$ est bien à densité et une densité est

$$f_{|Y|}(y) = F'_{|Y|}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ f_Y(y) + f_Y(-y) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} + \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|-y|} = \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{|Y| \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)}$

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).

on pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. **a.** On a $V(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$ et de $[X_1 > k] =$« échec jusqu'au $k^{ième}$ »donc P $[X_1 > k] = q^k$ et $P([X_1 \leqslant k]) = 1 - q^k$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

b. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \dfrac{2}{p}$, $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \dfrac{2q}{p^2}$ par indépendance,

$E\left(X_1-X_2\right)=0$, $V\left(X_1-X_2\right)=V\left(X_1\right)+(-1)^2 V\left(X_2\right)=\dfrac{2q}{p^2}$

c. $\left(X_1=X_2\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}\left(X_1=i\cap X_2=i\right)$ et par incompatibilité

$\mathrm{P}\left(X_1=X_2\right)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathrm{P}\left(X_1=i\cap X_2=i\right)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(q^{i-1}p\right)^2$ par indépendance.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left[X_1=X_2\right] &= \sum_{i=1}^{+\infty}\left(q^{i-1}p\right)^2 \\
&= p^2\sum_{i=1}^{+\infty}\left(q^2\right)^{i-1} \\
&= \frac{p^2}{1-q^2}=\frac{p^2}{(1-q)(1+q)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(X_1=X_2\right)=\dfrac{p}{1+q}}$

2. **a.** Pour $i\in\mathbb{N}$: $\left[\min\left(X_1,X_2\right)>i\right]=\left[X_1>i\cap X_2>i\right]$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z>i) &= \mathrm{P}\left(X_1>i\right)\mathrm{P}\left(X_2>i\right)\ \text{ par indépendance} \\
&= q^{2i}\ \text{(même pour } i=0\text{)}
\end{aligned}$$

Et comme $[Z>i-1]=[Z\geqslant i]=[Z=i]\cap[Z>i]$,par incompatibilité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z=i) &= \mathrm{P}(Z>i-1)-\mathrm{P}(Z>i) \\
&= q^{2i-2}-q^{2i}\ \text{pour } i-1\geqslant 0 \\
&= q^{2(i-1)}\left(1-q^2\right)\ \text{ pour } i\geqslant 1
\end{aligned}$$

Et comme $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$ on a bien

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} Z\hookrightarrow\mathcal{G}\left(1-q^2\right)\text{ d'où } E(Z)=\dfrac{1}{1-q^2}=\dfrac{1}{p(1+q)}\text{ et } V(Z)=\dfrac{q^2}{\left(1-q^2\right)^2} \\ \text{d'où } E(T)=E\left(X_1+X_2-Z\right)=\dfrac{2}{p}-\dfrac{1}{p(1+q)}=\dfrac{1+2q}{p(1+q)} \end{array}}$

b. $[Z=k]\cup[T=k]$ signifie que le plus petit ou le plus grand de X_1 et de X_2 est égal à k. Comme l'un est le plus petit et l'autre le plus grand, cela signifie que l'un ou l'autre est égal à k.

Conclusion : $\boxed{[Z=k]\cup[T=k]=\left[X_1=k\right]\cup\left[X_2=k\right].}$

et comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z=k\cup T=k) &= \mathrm{P}(Z=k)+\mathrm{P}(T=k)-\mathrm{P}(T=k\cap Z=k) \\
&= \mathrm{P}(Z=k)+\mathrm{P}(T=k)-\mathrm{P}\left(X_1=k\cap X_2=k\right)
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_1=k\cup X_2=k\right) &= \mathrm{P}\left(X_1=k\right)+\mathrm{P}\left(X_2=k\right)-\mathrm{P}\left(X_1=k\cap X_2=k\right) \\
&= 2\mathrm{P}\left(X_1=k\right)-\mathrm{P}\left(X_1=k\cap X_2=k\right)
\end{aligned}$$

car X_1 et X_2 on la même loi,

Conclusion : $\boxed{P(T=k)=2P\left(X_1=k\right)-P(Z=k)}$

c. On a alors, $E\left(T^2\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left(2P\left(X_1=k\right)-P\left(Z=k\right)\right)$ si la série converge.

Or $\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P\left(X_1=k\right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P\left(Z=k\right)$ convergent car X_1 et Z ont une variance, alors

$$\begin{aligned}
E\left(T^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}k^2 2P\left(X_1=k\right)-\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P\left(Z=k\right)\\
&= 2E\left(X_1^2\right)-E\left(Z^2\right)\\
&= 2\left[V\left(X_1\right)+E\left(X_1\right)^2\right]-\left[V\left(Z\right)+E\left(Z\right)^2\right]\\
&= 2\left[\frac{q}{p^2}+\frac{1}{p^2}\right]-\left[\frac{q^2}{\left(1-q^2\right)^2}+\frac{1}{\left(1-q^2\right)^2}\right]\\
&= 2\frac{q+1}{p^2}-\frac{q^2+1}{p^2\left(1+q\right)^2}\\
&= \frac{2\left(1+q\right)^2\left(q+1\right)-q^2-1}{p^2\left(1+q\right)^2}\\
&= \frac{2q^3+5q^2+6q+1}{p^2\left(1+q\right)^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
V\left(T\right) &= E\left(T^2\right)-E\left(T\right)^2\\
&= \frac{2q^3+5q^2+6q+1}{p^2\left(1+q\right)^2}-\left(\frac{1+2q}{p\left(1+q\right)}\right)^2\\
&= \frac{2q^3+5q^2+6q+1-1-4q-4q^2}{p^2\left(1+q\right)^2}\\
&= \frac{2q^3+q^2+2q}{p^2\left(1+q\right)^2}\\
&= \frac{q\left(2q^2+q+2\right)}{\left(1-q^2\right)^2}
\end{aligned}$$

3. **a.** $\max\left(X_1,X_2\right)\geqslant\min\left(X_1,X_2\right)$ donc $T-Z\geqslant 0$ et toutes les valeurs entières sont possibles.

Conclusion : $\boxed{\left(T-Z\right)\left(\Omega\right)=\mathbb{N}}$

On a $[Z=j]\cap[Z=T]=[X_1=j]\cap[X_2=j]$ et pour tout j de $\mathbb{N}^*$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(Z=j\cap Z=T\right)=\mathrm{P}\left(X_1=j\right)\mathrm{P}\left(X_2=j\right)=q^{2j-2}p^2 \text{ (par indépendance)}}$

b. Si (j,ℓ) de $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ alors $\ell>0$ et $[Z=j]\cap[T-Z=\ell]=[Z=j]\cap[T=\ell+j]$ avec $\ell+j\neq j$ donc

$$[Z=j]\cap[T=\ell+j]=\left(X_1=j\cap X_2=\ell+j\right)\cup\left(X_2=j\cap X_1=\ell+j\right)$$

et par $\cup$ d'incompatible et $\cap$ d'indépendants,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(Z=j\cap T-Z=\ell\right) &= \mathrm{P}\left(X_1=j\right)\mathrm{P}\left(X_2=\ell+j\right)+\mathrm{P}\left(X_2=j\right)\mathrm{P}\left(X_1=\ell+j\right)\\
&= 2q^{j-1}pq^{\ell+j-1}=2p^2q^{2j+\ell-2}
\end{aligned}$$

c. Si $k=0$ alors

$$\begin{aligned}
(X_1 - X_2 = 0) &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i \cap X_2 = i) \text{ donc} \\
\mathrm{P}(X_1 - X_2 = 0) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = i)\,\mathrm{P}(X_2 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)} p^2 \text{ avec } j = i-1 \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2j} \text{ et } |q| < 1 \\
&= p^2 \frac{1}{1-q^2} = \frac{pq^{|0|}}{1+q}
\end{aligned}$$

Si $k>0$ alors

$$\begin{aligned}
(X_1 - X_2 = k) &= (X_1 = X_2 + k) \\
&= \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i+k \cap X_2 = i) \text{ donc} \\
\mathrm{P}(X_1 - X_2 = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = i+k)\,\mathrm{P}(X_2 = i) \text{ avec } i+k \geqslant 1 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+k-1} p q^{i-1} p \\
&= q^k p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)} \text{ avec } j = i-1 \\
&= q^k p^2 \frac{1}{1-q^2} = \frac{q^k p}{1+q} = \frac{pq^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

et si $k<0$:

$$\begin{aligned}
(X_1 - X_2 = k) &= (X_2 = X_1 - k) \\
&= \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i-k \cap X_2 = i) \text{ donc} \\
\mathrm{P}(X_1 - X_2 = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = i-k)\,\mathrm{P}(X_2 = i) \text{ avec } i-k \geqslant 1 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-k-1} p q^{i-1} p \\
&= \frac{q^{-k} p}{1+q} = \frac{pq^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{Z} : P([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}}$

d. On a $|X_1 - X_2|(\Omega) = \mathbb{N}$

$(|X_1 - X_2| = 0) = (X_1 - X_2 = 0)$ donc $\mathrm{P}(|X_1 - X_2| = 0) = \dfrac{p}{1+q}$
et pour $k > 0$: $(|X_1 - X_2| = k) = (X_1 - X_2 = k) \cup (X_1 - X_2 = -k)$ incompatibles et

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{P}(|X_1 - X_2| = k) = 2\dfrac{pq^k}{1+q} \text{ si } k > 0 \\ \mathrm{P}(|X_1 - X_2| = 0) = \dfrac{p}{1+q} \end{array}}$

e. On a vu que $T - Z = |X_1 - X_2|$
Pour tout $(j, \ell) \in [\mathbb{N}^*]^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = j \cap T - Z = \ell) &= 2p^2 q^{2j+\ell-2} \text{ et d'autre part} \\
\mathrm{P}(Z = j)\,\mathrm{P}(T - Z = \ell) &= \mathrm{P}(Z = j)\,\mathrm{P}(|X_1 - X_2| = \ell) \\
&= q^{2(j-1)}\left(1 - q^2\right) 2\frac{pq^\ell}{1+q} \\
&= 2q^{2j}q^{-2}(1+q)(1-q)\frac{pq^\ell}{1+q} \\
&= \mathrm{P}(Z = j \cap T - Z = \ell)
\end{aligned}$$

et pour $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = j \cap T - Z = 0) &= q^{2j-2}p^2 \text{ et d'autre part} \\
\mathrm{P}(Z = j)\,\mathrm{P}(T - Z = 0) &= \mathrm{P}(Z = j)\,\mathrm{P}(|X_1 - X_2| = 0) \\
&= q^{2(j-1)}\left(1 - q^2\right)\frac{p}{1+q} \\
&= \mathrm{P}(Z = j \cap T - Z = 0)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Z \text{ et } T - Z \text{ sont indépendantes.}}$

4. **a.** Comme Z et $T - Z$ sont indépendantes, leur covariance est nulle.
Et comme $\operatorname{cov}(Z, T - Z) = \operatorname{cov}(Z, T) - \operatorname{cov}(Z, Z) = \operatorname{cov}(Z, T) + V(Z)$ alors

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{cov}(Z, T) = -V(Z) \neq 0 \\ \text{et } T \text{ et } Z \text{ ne sont pas indépendantes.} \end{array}}$

On pouvait le dire plus rapidement en remarquant que $T \geqslant Z$ donc, par exemple $(T = 1 \cap Z = 2) = \emptyset$ alors que $\mathrm{P}(T = 1)\,\mathrm{P}(Z = 2) \neq 0$

b. On a

$$\begin{aligned}
\rho = \frac{\operatorname{cov}(Z, T)}{\sqrt{V(T)\,V(Z)}} &= -\sqrt{\frac{V(Z)}{V(T)}} \\
&= -\sqrt{\frac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}}} = -\sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}}
\end{aligned}$$

c. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^*$
– Si $i > j$ alors $(Z = i \cap T = j) = \emptyset$ donc $\mathrm{P}(Z = i \cap T = j) = 0$
– Si $i = j$ alors $(Z = i \cap T = i) = (X_1 = i \cap X_2 = i)$ et $\mathrm{P}(Z = i \cap T = i) = q^{2i-2}p^2$

– Si $i < j$ alors $(Z = i \cap T = j) = (X_1 = i \cap X_2 = j) \cup (X_1 = j \cap X_2 = i)$ (incompatibilité, puis indépendance)
$\mathrm{P}(Z = i \cap T = j) = 2q^{i+j-2}p^2$

d. $\mathrm{P}_{Z=j}(T = k) = 0$ si $j > k$ car $Z > T$ est impossible.
Si $j = k$ alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{Z=j}(T = j) &= \frac{\mathrm{P}(Z = j \cap T = j)}{\mathrm{P}(Z = j)} \\
&= \frac{q^{2(j-1)}p^2}{q^{2(j-1)}(1-q^2)} \\
&= \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

Si $j < k$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{Z=j}(T = k) &= \frac{\mathrm{P}(Z = j \cap T = k)}{\mathrm{P}(Z = j)} \\
&= \frac{2q^{2(j+k-2)}p^2}{q^{2(j-1)}(1-q^2)} \\
&= \frac{2q^{2k}p}{1+q}
\end{aligned}$$

On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

On a donc $\mathrm{P}(D_j = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < j \\ \dfrac{p}{1+q} & \text{si } k = j \\ \dfrac{2q^{2k}p}{1+q} & \text{si } k > j \end{cases}$

et donc (sous réserve de convergence)

$$\begin{aligned}
E(D_j) &= \sum_{k=j}^{+\infty} k\mathrm{P}(D_j = k) \\
&= j\frac{p}{1+q} + \sum_{k=j}^{+\infty} k\frac{2q^{2k}p}{1+q} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\sum_{k=j}^{+\infty} kq^{2(k-j)} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\sum_{k=0}^{+\infty} (h+j)\,q^{2h} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\left[\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{1}{1-q^2}\right] \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\frac{1}{(1-q^2)^2}
\end{aligned}$$

Qui converge bien, donc D_j a une espérance et

Conclusion : $\boxed{E(D_j) = j\dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2pq^{2j}}{1+q}\dfrac{1}{(1-q^2)^2}}$.

Partie III. Convergences

Dans les questions **1** à **4**, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.
pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un $n$échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

1. On a $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n/\lambda$, et $V(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n/\lambda^2$ par indépendance.
$E(J_n) = \lambda E(S_n) = n$ et $V(J_n) = \lambda^2 V(S_n) = n$

2. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

a. Soit $n \geqslant 3$. Sous réserve d'absolue convergence (ssi convergence simple car tout est positif),

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{J_n}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x^{n-2}}{(n-1)!}dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!}I_{n-2} \text{ converge car } n-2 \in \mathbb{N} \\ &= \frac{(n-2)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x^{n-3}}{(n-1)!}dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!}I_{n-3} \text{ converge car } n-3 \in \mathbb{N} \\ &= \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} E\left(\dfrac{1}{J_n}\right) \text{ et } E\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right) \text{ existent et} \\ E\left(\dfrac{1}{J_n}\right) = \dfrac{1}{n-1} \text{ et } E\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right) = \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \end{array}}$

b. $\widehat{\lambda_n}$ est une fonction du n échantillon. Donc c'est un estimateur de λ.
$\widehat{\lambda_n} = \lambda\dfrac{n}{\lambda S_n} = \lambda n\dfrac{1}{J_n}$ donc $E\left(\widehat{\lambda_n}\right) = \lambda n E\left(\dfrac{1}{J_n}\right) = \lambda n\dfrac{1}{n-1} \neq \lambda$
Donc le biais est $b = E\left(\widehat{\lambda_n}\right) - \lambda = \dfrac{\lambda}{n-1}$

Conclusion : $\boxed{\widehat{\lambda_n} \text{ est biaisé.}}$

$V\left(\widehat{\lambda_n}\right) = V\left(\lambda n \dfrac{1}{J_n}\right) = \lambda^2 n^2 V\left(\dfrac{1}{J_n}\right)$
avec

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{1}{J_n}\right) &= E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) - E\left(\frac{1}{J_n}\right)^2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\
&= \frac{1}{(n-1)^2(n-2)} \\
V\left(\widehat{\lambda_n}\right) &= \frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2(n-2)}
\end{aligned}$$

Donc le risque quadratique est

$$\begin{aligned}
r &= V\left(\widehat{\lambda_n}\right) + b^2 \\
&= \frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{\lambda^2\left(n^2+n-2\right)}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\lambda^2(n-1)(n+2)}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{\lambda^2(n+2)}{(n-1)(n-2)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{le risque quadratique } \widehat{\lambda_n} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

3. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

a. Etant donné une suite de variables aléatoires (X_n) indépendantes, de même loi et de variance non nulle, alors la somme centrée réduite des n premiers converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
C'est à dire que la fonction de répartition de la somme centrée réduite tends vers Φ.
$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ a pour espérance n/λ et pour variance n/λ^2.
Les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et ont une variance non nulle. Donc la centrée réduite $\dfrac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = N_n$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

b. Donc, pour n assez grand, $\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha) \simeq \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha)$ car $-u_\alpha \leqslant u_\alpha$ et comme $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha) \simeq 1 - \alpha}$

c. On résout : $\lambda \in \left[\left(1 - \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]$

$\iff \left(1 - \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{n}{S_n} \leqslant \lambda \leqslant \left(1 + \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{n}{S_n}$

$\iff \left(1 - \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{n}{\lambda} \leqslant S_n \leqslant \left(1 + \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{n}{\lambda}$

$\Longleftrightarrow -\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\dfrac{n}{\lambda} \leqslant S_n - \dfrac{n}{\lambda} \leqslant \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\dfrac{n}{\lambda}$
$\Longleftrightarrow -u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha$
Donc $\mathrm{P}\left(\lambda \in \left[\left(1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) = \mathrm{P}\left(-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha\right) \simeq 1-\alpha$

Conclusion : $\left[\left(1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]$ est un intervalle de confiance de λ au niveau de risque α quand n est grand.

On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda_n}$ sur le n-échantillon.

4. Avec le n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.

a. Comme la densité φest continue sur $\mathbb{R}$, Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Et comme $\Phi' = \varphi > 0$ alors Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle et donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{-\infty}\Phi ; \lim\limits_{+\infty}\Phi\right[=]0,1[$

Conclusion : Φ a une réciproque Φ^{-1} qui est définie sur $]0,1[$

b. L'intervalle de confiance précédent est $\left[\widehat{\lambda_n} - \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n} \ , \ \widehat{\lambda_n} + \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right]$ centré sur $\widehat{\lambda_n}$ et de rayon $\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}$.
Celui de longueur k fois plus petite est $\left[\widehat{\lambda_n} - \dfrac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n} \ , \ \widehat{\lambda_n} + \dfrac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right]$
et comme précédemment,
$\lambda \in \left[\widehat{\lambda_n} - \dfrac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n} \ , \ \widehat{\lambda_n} + \dfrac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right]$
$\Longleftrightarrow -u_\alpha/k \leqslant N_n \leqslant u_\alpha/k$
Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\lambda \in \left[\widehat{\lambda_n} - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n} \ , \ \widehat{\lambda_n} + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right]\right) &= \Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - \Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1\end{aligned}$$

On a $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ donc $u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ qui ne simplifie pas l'écriture
d'où, astuce : $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$ et $-u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2)$ soit $u_\alpha = -\Phi^{-1}(\alpha/2)$ d'où

$$\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) = \Phi\left(-\frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{k}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{k}\right)$$

et la probabilité :

$$\mathrm{P}(\lambda \in [\cdots]) = 1 - 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$$

Conclusion : $\boxed{\left[\widehat{\lambda_n} - \dfrac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\ ,\ \widehat{\lambda_n} + \dfrac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } \lambda \text{ au niveau de risque } \beta = 2\Phi\left(\dfrac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)}$

On remarque que $\alpha = 2\Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$ et on résout :

$\beta > \alpha \Longleftrightarrow \Phi\left(\dfrac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right) > \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2) > \Phi^{-1}(\alpha/2)$ et comme $\dfrac{1}{k} > 1$ et que $\Phi^{-1}(\alpha/2) \geqslant 0$, cette inégalité est bien vérifiée.

Conclusion : $\beta > \alpha$ ce qui était prévisible :

La probabilité d'être dan un intervalle plus étroit est plus petite !

Dans les questions **5** à **7**, on suppose que $\lambda = 1$.

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose : $g_n(x) = \displaystyle\int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$ et $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$

a. $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$

On l'intègre par parties pour faire apparaître $\displaystyle\int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$:

Soit $u'(t) = f_{T_n}(t)$: $u(t) = F_{T_n}(t)$ et $v(t) = t$: $v'(t) = 1$

v est C^1 et u est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ car la densité f_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt &= \left[tF_{T_n}(t)\right]_0^x - \int_0^x F_{T_n}(t)\,dt \\ &= xF_{T_n}(x) - g_n(x)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{h_n(x) = xF_{T_n}(x) - g_n(x)}$

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $(T_n \leqslant t) = \max(X_1, X_2, ..., X_n) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant t)$ indépendants donc

$F_{T_n}(t) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \leqslant t) = [F_X(t)]^n$

$\mathrm{P}\max(X_1, X_2, ..., X_n) \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f_{T_n}(x)\,dx = 0$ si $t \leqslant 0$

et si $t \geqslant 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f_{T_n}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^t e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1 - e^{-t}$

Conclusion : $\boxed{F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(1 - e^{-t}\right)^n & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$

Soit $n \geqslant 2$ (pour avoir $n-1 \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{aligned}
g_{n-1}(x) - g_n(x) &= \int_0^x \left(F_{T_{n-1}}(t) - F_{T_n}(t)\right) dt \\
&= \int_0^x \left(\left(1-e^{-t}\right)^{n-1} - \left(1-e^{-t}\right)^n\right) dt \\
&= \int_0^x \left(1-e^{-t}\right)^{n-1} e^{-t} dt \text{ à la volée :} \\
&= \left[\frac{1}{n}\left(1-e^{-t}\right)^n\right]_0^x \\
&= \frac{1}{n}\left(1-e^{-x}\right)^n - 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2 : g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x)}$

c. On a donc pour $n \geqslant 2$: $g_n(x) = g_{n-1}(x) - \frac{1}{n} F_{T_n}(x)$ et par récurrence :

$$g_n(x) = -\frac{1}{n} F_{T_n}(x) - \frac{1}{n-1} F_{T_{n-1}}(x) \cdots - \frac{1}{2} F_{T_2}(x) + g_1(x)$$

et comme

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \int_0^x F_{T_1}(t)\, dt = \int_0^x 1 - e^{-t} dt = \left[t + e^{-t}\right]_0^x \\
&= x + e^{-x} - 1 \\
&= x - \frac{1}{1} F_{T_1}(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{g_n(x) = x - \frac{1}{n} F_{T_n}(x) - \frac{1}{n-1} F_{T_{n-1}}(x) \cdots - \frac{1}{2} F_{T_2}(x) - \frac{1}{1} F_{T_1}(x)}$

d. Pour $x \geqslant 0$: $F_{T_n}(x) - 1 = \left(1-e^{-x}\right)^n - 1$
Comme $-e^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et que $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ quand $x \to 0$ alors $(\alpha = n)$

Conclusion : $\boxed{F_{T_n}(x) - 1 \sim -ne^{-x} \text{ quand } x \to +\infty}$

e. T_n a une espérance si $\int_0^x t f_{T_n}(t)\, dt = x F_{T_n}(x) - g_n(x)$ a une limite finie quand $x \to +\infty$
Astuce : On réécrit $x F_{T_n}(x) - g_n(x) = x\left(F_{T_n}(x) - 1\right) + x - g_n(x)$ pour faire apparaître la quantité dont on a un équivalent.
Or $x\left(F_{T_n}(x) - 1\right) \sim -nxe^{-x} \to 0$ car $x = o\left(e^x\right)$ quand $x \to +\infty$ donc $x\left(F_{T_n}(x) - 1\right) \to 0$.
D'autre part, toute fonction de répartition tend vers 1 en $+\infty$ donc

$$\begin{aligned}
x - g_n(x) &= \frac{1}{n} F_{T_n}(x) + \frac{1}{n-1} F_{T_{n-1}}(x) \cdots + \frac{1}{2} F_{T_2}(x) + \frac{1}{1} F_{T_1}(x) \\
&\to \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ quand } x \to +\infty
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{T_n \text{ a une espérance et } E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$

6. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - E(T_n)$.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

a. Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} F_{G_n}(x) &= \mathrm{P}(G_n \leqslant x) = \mathrm{P}(T_n \leqslant x + E(T_n)) \\ &= F_{T_n}(x + E(T_n)) \end{aligned}$$

avec $x + E(T_n) = x + \gamma_n + \ln(n)$
Et comme $E(T_n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, pour n suffisamment grand on aura $E(T_n) - x \geqslant 0$ et donc $F_{T_n}(\cdots) = \left(1 - e^{-\cdots}\right)^n$

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x + E(T_n)) &= \left(1 - e^{-(x+\gamma_n+\ln(n))}\right)^n \\ &= \left(1 - e^{-\ln(n)}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel et } n \text{ assez grand, on a : } F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n.}$

b. On a une forme indéterminée 1^∞ qu'il faut résoudre :

$$\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)\right]$$

Comme $e^{-(x+\gamma_n)} \to e^{-(x+\gamma)}$ et que $-\frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)} \to 0$ alors

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right) &\sim -\frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)} \text{ et} \\ \left[n\ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)\right] &\sim -e^{-(x+\gamma_n)} \to -e^{-(x+\gamma)} \text{ donc} \\ \left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n &\to \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \end{aligned}$$

Et comme $n \to +\infty$, il sera "suffisamment grand" et

Conclusion : $\boxed{F_{G_n}(x) \to \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \text{ quand } n \to +\infty}$

c. Pour tout x réel, $F_G(x) = \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right]$
F_G est continue et C^1 sur $\mathbb{R}$
En $-\infty$: $-e^{-(x+\gamma)} \to -\infty$ donc $F_G(x) \to 0$
En $-\infty$: $-e^{-(x+\gamma)} \to 0$ et $F_G(x) \to 1$
Enfin , F_G est croissante sur $\mathbb{R}$. (composée de deux fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$ ou par $F_G'(x) = \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \times -e^{-(x+\gamma)} \times -1 > 0$)

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} F_G \text{ est la fonction de répartition d'une variable à densité } G \text{ et} \\ (G_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers la loi de } G \end{array}}$

7. **a.** Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante.
Pour tout x réel, $(Y \leqslant x) = (F_X(X) \leqslant x)$
Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ (variable à densité) et qu'elle est strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et admet une réciproque.
- Si $x \leqslant 0$: $(Y \leqslant x) = \emptyset$ et $F_Y(x) = 0$
- Si $x \geqslant 1$: $(Y \leqslant x) = \Omega$ et $F_Y(x) = 1$
- Si $x \in]0,1[$: $(Y \leqslant x) = \left(X \leqslant F_X^{-1}(x)\right)$ donc $F_Y(x) = F_X\left(F_X^{-1}(x)\right) = x$

et on reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}}$

b. La variable aléatoire G a pour fonction de répartition $F_G : x \to \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right]$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $Y = F_G(G) \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$. reste à déterminer G en fonction de Y :
$Y = F_G(G) \Longleftrightarrow Y = \exp\left[-e^{-(G+\gamma)}\right]$
$\Longleftrightarrow \ln(Y) = -e^{-(G+\gamma)}$ car $Y > 0$
$\Longleftrightarrow \ln(-\ln(Y)) = -G - \gamma$ car $-\ln(Y) > 0$ puisque $Y < 1$
$\Longleftrightarrow G = -\gamma - \ln(-\ln(Y))$
d'où la simulation :

```
def Gumbel():
  y=rd.random()
  return -np.euler_gamma-np.log(-np.log(Y))
```