Sujet 2 : type mixte EDHEC - ESSEC - HEC

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, sans pour autant les panacher.
Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

a. Déterminer le rang de $\mathrm{A} - 3I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4
En déduire une valeur propre λ_1 pour A et le sous-espace propre associé.

b. Calculer $A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

En déduire une valeur propre λ_2 pour A et déterminer le sous-espace propre associé.

c. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A suivant la base canonique $(\ e_1, e_2, e_3, e_4\ )$ de $\mathbb{R}^4$

i. Déterminer une base de l'image de f

ii. Calculer $f\left(3e_1 - 2e_2\right)$

iii. En déduire le noyau de f, sans résoudre de système linéaire.

iv. En déduire une valeur propre λ_3 de A et le sous-espace propre associé.

d. Montrer que -1 est une valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

e. Montrer qu'il existe une matrice inversible P de première ligne ne contenant que des 1 , et telle que :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère le système différentiel d'ordre 2 :

$$S:\left\{\begin{array}{lllllll} 2x'' & +3y'' & -4x' & -6y' & -6x & -9y & =0 \\ -6x'' & -6y'' & +14x' & +15y' & +12x & +18y & =0 \end{array}\right.$$

d'inconnues x, y, fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

et, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$

2. En utilisant des opérations sur S, montrer que S est équivalent à l'équation :

$$S_D : \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)$$

3. Résoudre le système S_D

4. Déterminer l'unique couple solution (x_0, y_0) de S vérifiant :

$$x_0(0) = 0, \quad y_0(0) = 2, \quad x_0'(0) = 1, \quad y_0'(0) = -\frac{8}{3}$$

Quelles sont les limites de x_0, x_0', y_0 et y_0' en $+\infty$?

5. Soit X une solution de S_D vérifiant $x(0) = a, y(0) = b, x'(0) = c$ et $y'(0) = d$
Montrer que x et y admettent une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

$$8c + 3d = 0 \quad \text{ et } \quad 2a + 3b + 2c + 3d = 0$$

Problème - une propriété limite des lois de Pareto

Question préliminaire

Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

1. **a.** Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$,

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g\big(\alpha+(\beta-\alpha)x\big)\,\mathrm{d}x$$

b. Soit a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$
On suppose g décroissante sur I, établir l'encadrement :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

Pour tout réel x positif ou nul :
- on note $[x]$ la *partie entière* de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier naturel n qui vérifie l'encadrement : $n \leqslant x < n+1$
- on note $\{x\} = x - [x]$, que l'on appelle la *partie fractionnaire* de x

Par exemple, si $x = 12,34$, alors $[x] = 12$ et $\{x\} = 0,34$

Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité f qui vérifie les propriétés :
- f est nulle sur $]-\infty, 0[$
- la restriction de f à $[0,+\infty[$ est continue et décroissante.

On pose $M = f(0)$, c'est le maximum de f sur $\mathbb{R}$

Soit $Y = \{X\} = X - [X]$, la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de X
On note F_Y la fonction de répartition de Y

2. Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y < 0$? Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y \geqslant 1$?
On justifiera les réponses.

3. Justifier l'égalité entre les événements : $(Y=0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X=n)$

En déduire : $F_Y(0) = 0$

4. Soit y un réel de l'intervalle $]0,1[$

a. Montrer l'égalité : $F_Y(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+y} f(t)\,\mathrm{d}t$

b. Montrer, en utilisant la question préliminaire, les inégalités :
- Pour tout n entier naturel, $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant y\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
- Pour tout n entier naturel non nul, $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant y\int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\,\mathrm{d}t$

c. En déduire : $\displaystyle y\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant F_Y(y) \leqslant \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t + y\int_y^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, puis l'encadrement

$$y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M$$

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel λ strictement positif, on définit la fonction g_λ sur $\mathbb{R}$ par $g_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, g_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (loi dite *de Pareto*).

Dans toute la suite, on note Z_λ une variable aléatoire admettant g_λ pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition G_λ de Z_λ

7. On note ln la fonction *logarithme népérien*, et log la fonction *logarithme décimal.*
Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel x strictement positif.

On pose $X_\lambda = \log\big(Z_\lambda\big)$, et on note F_λ la fonction de répartition de X_λ

a. Etablir, pour tout réel x, l'égalité : $F_\lambda(x) = G_\lambda\big(10^x\big)$

b. En déduire que X_λ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre en fonction de λ

8. On pose $Y_\lambda = \big\{X_\lambda\big\}$, la partie fractionnaire de X_λ
Montrer, en utilisant les résultats de la **partie I**, que pour tout réel y de l'intervalle $]0, 1[$:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} P\big(Y_\lambda \leqslant y\big) = y$$

En déduire que, pour tout y, lorsque λ tend vers 0^+, $P\big(Y_\lambda \leqslant y\big)$ tend vers $F_T(y)$ où F_T est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T suivant une loi usuelle, loi que l'on précisera.
On dit alors que Y_λ converge en loi vers la variable aléatoire T

9. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on note $\alpha(x)$ le premier chiffre dans l'écriture décimale de x. C'est un entier de l'intervalle $[\![1, 9]\!]$

Par exemple, $\alpha(50) = 5$ et $\alpha(213,43) = 2$

a. Pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$, montrer l'équivalence :

$$\alpha(x) = k \quad \Leftrightarrow \quad \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log k, \log(k+1)\big[$$

b. On note $C_\lambda = \alpha\big(Z_\lambda\big)$ la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de Z_λ
Montrer, pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$: $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0^+} P(C_\lambda = k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Cette loi limite obtenue pour le premier chiffre de Z_λ est appelée *loi de Benford.*