Sujet 1 : type Ecricome - EML

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, sans pour autant les panacher.
Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1

Partie 1 : loi de Pareto

On pose, pour $\alpha > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Toutes les variables seront supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour une variable aléatoire X, on notera F_X sa fonction de répartition, et on notera $R_X = 1 - F_X$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_X(x) = 1 - F_X(x)$$

1. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, f_α est une densité de probabilité.
La loi associée à cette densité est appelée loi de Pareto de paramètre α et on dira qu'une variable aléatoire de densité f_α suit la loi $\mathcal{P}(\alpha)$ (loi de Pareto).

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha)$, avec $\alpha > 0$

a. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si $\alpha > 1$. Calculer alors $E(X)$

b. Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$, et vérifier que, dans ce cas,

$$V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha)$, avec $\alpha > 0$

a. Pour tout réel x, déterminer une expression de $F_X(x)$ et de $R_X(x)$ (on distinguera les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$).

b. Montrer que, pour $a > 1$ et $b > 0$: $P_{[X>a]}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^\alpha$

c. Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} P_{X>a}(X > a+b)$

d. En supposant que X désigne la durée de vie d'un composant, que signifie cette valeur limite ?

Partie 2 : simulation informatique

4. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
   Montrer que la variable $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ
5. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$
   Montrer que la variable e^Y suit la loi de Pareto de paramètre λ
6. En déduire une commande Python permettant de simuler une réalisation de la loi de Pareto de paramètre λ

Partie 3 : questions de convergence

On suppose dans cette partie que α est un réel strictement supérieur à 2 et X une variable suivant la loi de Pareto de paramètre α
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoire indépendantes et de même loi que X (loi de Pareto de paramètre $\alpha > 2$).

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, U_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $T_n = c_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ où c_n est un réel.

7. **a.** Déterminer la valeur de c_n pour que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(T_n) = 1$
   b. On suppose c_n choisi tel que $E(T_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   Calculer alors $V(T_n)$ et sa la limite quand n tend vers $+\infty$
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   a. Déterminer $P(U_n > x)$ pour $x < 1$
   b. Montrer que, pour $x \geqslant 1, P(U_n > x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{n\alpha}$
   c. Reconnaître alors la loi de U_n
   Justifier que U_n admet une espérance $E(U_n)$ et une variance $V(U_n)$ et montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} E(U_n) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(U_n) = 0$$

Exercice 2

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
On considère l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base $\mathscr{B}$ par la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I_3 (resp. $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$) désignera la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. la matrice nulle), représentant l'endomorphisme identité id (resp. l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$) de $\mathbb{R}^3$ dans une base quelconque.

Partie I : étude de f

1. **a.** Calculer $(A - I_3)^3$
   b. En déduire que f est un isomorphisme et donner une expression de la matrice de f^{-1} en fonction de I_3, A et A^2
2. Montrer que A admet une seule valeur propre et que le sous-espace propre associé est de dimension 1
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Soit $e_2' = (f - id)(e_3)$ et $e_1' = (f - id)(e_2')$

a. Calculer e_2' et e_1'

b. Montrer que $\mathscr{B}' = \left(e_1', e_2', e_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

c. Déterminer la matrice T de f relative à la base $\mathscr{B}'$

d. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathscr{B}'$ et une relation entre P, T et A

5. On note $B = A - I_3$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$

b. En déduire trois suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A + \gamma_n A^2$$

Partie II : résolution d'une équation

Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation

$$\mathcal{E}: \quad M^2 = A \quad \text{d'inconnue} \quad M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

On suppose dans un premier temps que cette équation admet des solutions et que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une solution de l'équation $\mathcal{E}$

On note g l'endomorphisme représenté par M suivant la base $\mathscr{B}$

Ainsi, on remarquera que $g^2 = g \circ g = f$

6. En utilisant un polynôme annulateur de M, montrer que $\operatorname{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}$

7. **a.** Montrer que, si V est un vecteur propre de M, alors V est un vecteur propre de A

b. En raisonnant sur la dimension du sous-espace propre de A, en déduire que :

i. M ne peut pas avoir deux valeurs propres différentes,

ii. si M admet une valeur propre, alors M admet une unique valeur propre, et que le sous-espace propre associé est de dimension 1

8. Montrer que $f\left(g\left(e_1'\right)\right) = g^3\left(e_1'\right) = g\left(e_1'\right)$. En déduire qu'il existe un réel μ tel que :

$$g\left(e_1'\right) = \mu e_1' \quad \text{et} \quad \mu^2 = 1$$

Quitte à changer g en $-g$ (qui est une autre solution de $g^2 = f$), on supposera dans la suite que :

$$g\left(e_1'\right) = e_1'$$

Des questions précédentes, on obtient que M admet une et une seule valeur propre égale à 1 , et son sous-espace propre associé est de dimension 1

9. Justifier que $M + I_3$ est inversible, puis que $(M - I_3)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

10. On note $N = M - I_3$ et on rappelle que $B = A - I_3$

a. Montrer que : $N^2 + 2N = B$

b. Montrer que $4N^2 = B^2$ et en déduire une expression de N en fonction de B et de B^2, puis trouver trois réels a, b, c tels que :

$$M = aI_3 + bA + cA^2$$

Comparer le résultat avec celui obtenu dans la question **5.b**.

c. Vérifier par un calcul que $\left(aI_3 + bA + cA^2\right)^2 = A$

11. Conclure sur les solutions de $\mathcal{E}$

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaitre la loi de Y

On revient au cas général.

2. Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaitre la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$

4. On rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$
- `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p
- `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p
- `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a

a. Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y

```
def simulXY(n,p):
  X=
  Y=
  return
```

b. Ecrire un programme Python qui calcule la moyenne de 1 000 simulations de la variable aléatoire Y
Comment peut-on interpréter le résultat ?

5. **a.** Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q\,(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

b. Ecrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. **a.** Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Montrer l'égalité : $i \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$

b. Etablir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix} p^i q^{k-i} \right)$$

c. En déduire que $E(Y) = \dfrac{(n+1)p}{2}$

7. **a.** Etablir que : $\forall n \geqslant 2, E(Y(Y-1)) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(k(k-1) \sum_{i=2}^{k} \begin{pmatrix} k-2 \\ i-2 \end{pmatrix} p^i q^{k-i} \right)$

b. Montrer que l'on a : $\forall n \geqslant 2, E(Y(Y-1)) = \dfrac{(n^2-1)\,p^2}{3}$

c. Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$

d. Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$