Chapitre 11 - graphes probabilistes - chaines de Markov

Exercice 1 - le problème du collectionneur

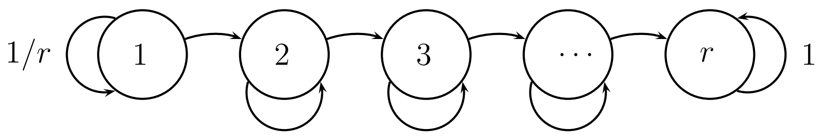
Le titre de l'exercice vient d'une situation concrète : un collectionneur de cartes à jouer (ou de timbres, etc.) achète des paquets de cartes. Dans chaque paquet, il y a une carte « rare » et d'autres communes . On suppose qu'il y a r cartes rares en tout et que la probabilité d'obtenir une carte rare donnée dans un paquet est égale à $\dfrac{1}{r}$ (équiprobabilité). On s'intéresse au moment où le collectionneur obtient la collection complète des cartes rares.

Le problème peut être modélisé ainsi : une urne contient r boules numérotées de 1 à r. On effectue des tirages avec remise d'une boule et on note son numéro. On note X_n le nombre de numéros différents obtenus lors des n premiers lancers.
On pourra s'appuyer sur les exemples $r = 3$ ou $r = 4$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in \{1, \dots r\}$, $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = i) = \dfrac{i}{r}$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in \{1, \dots r\}$, $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = i+1) = 1 - \dfrac{i}{r}$

3. Compléter le graphe probabiliste suivant schématisant les résultats précédents (de l'état n à l'état $n+1$) :



Dans le cas $r = 4$, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$

4. Déterminer la matrice M vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n M$

5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vérifier que $M = PDP^{-1}$ où $D = \dfrac{1}{4}\text{Diag}(1, 2, 3, 4)$ (matrice diagonale).

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = U_1 M^{n-1}$

7. Montrer que : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$

8. Calculer P^{-1} puis en déduire U_n en fonction de n (loi de X_n)

9. Déterminer les limites des composantes de U_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 2 - tirages dans une urne

Une urne contient initialement r boules rouges et $m-r$ boules blanches, où m et r sont des entiers naturels vérifiant $0 \leqslant r \leqslant m$ et $m \geqslant 2$

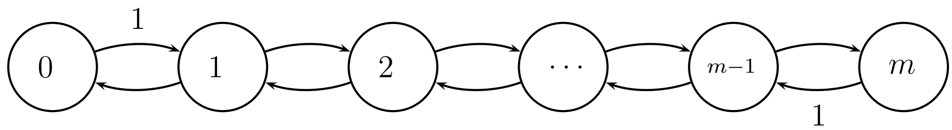
On effectue une série de tirages ; à chaque tirage, la boule tirée est écartée et on remet dans l'urne une boule de la couleur opposée (blanche si la boule tirée et rouge et inversement).

On s'intéresse au nombre X_n de boules rouges dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage, avec $X_0 = r$

On posera, pour $n \in \mathbb{N}$, U_n le vecteur ligne (loi de X_n) :

$$U_n = \Big(P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad \dots \quad P(X_n = m) \Big)$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $P(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{m} P(X_n = 1)$ et $P(X_{n+1} = m) = \dfrac{1}{m} P(X_n = m-1)$
2. Compléter le graphe probabiliste suivant schématisant l'évolution de l'état n à l'état $n+1$:



3. Montrer que, pour $i \in [\![1, m-1]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$P(X_{n+1} = i) = \frac{m-i+1}{m} P(X_n = i-1) + \frac{i+1}{m} P(X_n = i+1)$$
Dans la suite, on suppose que $m = 2$ et $r = 1$
4. Déterminer la matrice de transition associée à la chaine de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$
5. **a.** Montrer que les valeurs propres de M sont $-1, 0$ et 1
Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, on déterminera un vecteur colonne C_λ de première coordonnée égale à 1 et générateur du sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ
b. On définit une matrice carrée P par ses colonnes : dans l'ordre égales à C_{-1}, C_0 et C_1
Justifier que P est une matrice inversible.
c. Trouver une matrice diagonale D telle que $MP = PD$ et en déduire que M est diagonalisable.
6. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n P$. Donner une relation entre V_{n+1}, V_n et D
7. Montrer que les composantes de U_n n'ont pas de limite quand n tend vers $+\infty$
8. Montrer que la chaine de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une loi de probabilité invariante, c'est-à-dire un vecteur ligne U définissant une loi de probabilité et vérifiant $U = UM$

Exercice 3

On considère la chaine de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definie par : $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$:

- la loi de X_{n+1} sachant $[X_n = 0]$ est la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$
- la loi de X_{n+1} sachant $[X_n = 1]$ est la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{3}{4}$

1. Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X_n est à valeurs dans $\{0, 1\}$
Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaine de Markov homogène et déterminer la matrice de transition M ainsi que son graphe probabiliste associé.
2. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
3. Déterminer une matrice P inversible de deuxième ligne $(1 \quad 1)$ et une matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ diagonale avec $\lambda_1 < \lambda_2$ telles que $M = PDP^{-1}$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$ et calculer explicitement M^n (on calculera P^{-1})
5. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1))$

a. Justifier la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n M$

b. Montrer que les composantes de U_n ont une limite quand n tend vers $+\infty$

c. Que dire du vecteur $U = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) & \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) \end{pmatrix}$?

Exercice 4 (Edhec)

Les sommets d'un carré sont numérotés $1, 2, 3, 4$. Un mobile se déplace aléatoirement sur ces sommets selon le protocole suivant :

- au départ, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1
- lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un des trois autres sommets, de manière équiprobable.

On note, pour $n \in \mathbb{N}, X_n$ la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n, avec donc $X_0 = 1$

On note, pour $n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & \dots & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$ définissant la loi de X_n

1. Donner la loi de X_1, son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$

2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov homogène.
Déterminer sa matrice de transition M et faire le graphe probabiliste correspondant en indiquant les probabilités de transition.

3. Justifier la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n M$

4. On pose : J la matrice carrée d'ordre 4 ne contenant que des 1

a. Calculer J^2, puis montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}, J^n = 4^{n-1} J$

b. Déterminer les valeurs propres de J et les sous-espaces propres correspondants.

c. Justifier que J est diagonalisable.

5. **a.** Ecrire M comme combinaison linéaire de J et de I_4

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n est une combinaison linéaire de I_4 et de J que l'on explicitera.

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 M^n$. En déduire la loi de X_n

6. Montrer que la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une probabilité invariante (état stable).

7. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a. Vérifier que $MC = \dfrac{10}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3} C$

b. En déduire : pour $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3} E(X_{n-1})$

c. Déterminer $E(X_n)$ en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$

Exercice 5

On considère une urne contenant initialement 2 boules blanches et 1 boule noire et on dispose d'une pièce équilibrée.
On effectue une suite de tirage selon le protocole suivant :
- on pioche une boule de l'urne et on lance la pièce ;
- si on obtient PILE, on remet la boule dans l'urne ;
- si on obtient FACE, on écarte la boule et on remet dans l'urne une boule de la couleur opposée (noire si on a pioché une boule blanche, et blanche si on a pioché une boule noire).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules noires à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage, et on posera $X_0 = 1$

On note enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \Big(P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3)\Big)$ (loi de X_n)

1. Montrer que, pout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{2}P(X_n = 0) + \dfrac{1}{6}P(X_n = 1)$
2. Montrer que, pout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_{n+1} = 3) = \dfrac{1}{6}P(X_n = 2) + \dfrac{1}{2}P(X_n = 3)$
3. Déterminer, pour $i \in \{1, 2\}$, $P_{X_n=i}(X_{n+1} = i)$, $P_{X_n=i-1}(X_{n+1} = i)$ et $P_{X_n=i+1}(X_{n+1} = i)$
   Regrouper les résultats obtenus dans un graphe probabiliste schématisant le passage de l'état au tirage n à l'état au tirage $n + 1$.
4. Déterminer la matrice de transition M associée à la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$
5. Justifier la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n M$
6. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \left\{0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 1\right\}$
7. Déterminer une matrice inversible P de deuxième ligne ne contenant que des 1, telle que : $M = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{Diag}\left(1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$

   réponse : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
8. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n P$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = V_0 D^n$
9. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$ et $V_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$
   a. Déterminer, quand $n \to +\infty$, les limites de α_n, β_n, γ_n, δ_n, respectivement notées $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
   b. On pose $V = (\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta)$ et $U = VP^{-1} = (a \quad b \quad c \quad d)$
   Montrer que a, b, c, d sont les limites respectives de a_n, b_n, c_n, d_n quand $n \to +\infty$
   c. Justifier que U est une loi de probabilité invariante (état stable) pour la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 6

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N avec $N \geqslant 2$, indiscernables.
On effectue une suite de tirages indépendants **avec remise** dans cette urne et on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, T_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros obtenus à l'issue des n premiers tirages.

1. Indiquer $T_n(\Omega)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut T_1 ?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que dire de la loi de T_{n+1} sachant $[T_n = N]$?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour deux entiers naturels i et j, avec $i < N$, calculer $P_{T_n=i}(T_{n+1} = j)$ dans les cas $j = i$ et $j = i + 1$

4. Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaine de Markov homogène. On notera M_N sa matrice de transition.

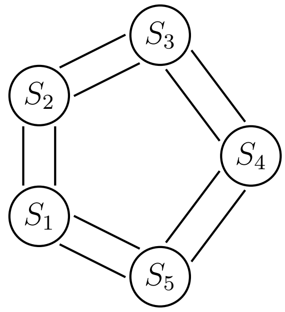
5. Justifier que M_N est diagonalisable.

6. Dans cette question, on considère le cas $N = 3$ et on note $M = M_3$

- **a.** Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant tels que $M = PDP^{-1}$
- **b.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$
  Déterminer P^{-1} et en déduire explicitement M^n pour $n \in \mathbb{N}$
- **c.** Soit $U_n = \Big((P(T_n = 1) \quad P(T_n = 2) \quad P(T_n = 3)\Big)$
  Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U_1M^{n-1}$, puis expliciter U_n
- **d.** Montrer que les composantes de U_n ont une limite quand n tend vers $+\infty$
  En notant $U = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n = 1) \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n = 2) \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n = 3)\right)$, à quoi correspond U ?

Exercice 7 - marche sur un pentagone

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 disposés en pentagone et reliés par des routes comme l'illustre le schéma ci-contre. Elles arrivent au rendez-vous l'heure prévu, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.



Elles décident alors de partir à la recherche l'une de l'autre. Elles empruntent les différentes routes du complexe avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacune choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacements se font indépendamment les uns des autres.

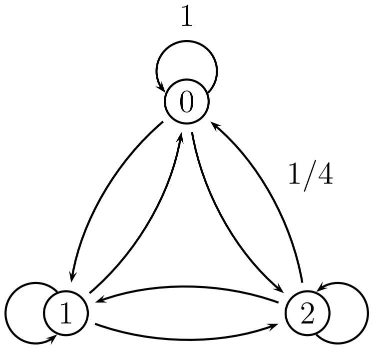
Elles continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvées, elles ne se déplacent plus.
Pour tout entier naturel n, on définit une variable aléatoire X_n à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ par :

- $[X_n = 0]$: « les deux personnes sont sur le même site après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- $[X_n = 1]$: « les deux personnes sont sur sur deux sites adjacents après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- $[X_n = 2]$: « les deux personnes sont à deux routes de distance après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »

1. Préciser X_0

2. Montrer que $P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = 1$

3. Déterminer les autres probabilités conditionnelles $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j)$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$
On représentera les résultats en reproduisant et en complétant le schéma suivant :



4. Déterminer la matrice de transition M associée à la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$ et $c_n = P(X_n = 2)$
On note $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 16b_{n+2} - 20b_{n+1} + 5b_n = 0$

b. En déduire deux réels λ_1 et λ_2 tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \lambda_1\alpha^n + \lambda_2\beta^n$

c. Déterminer de même deux réels μ_1 et μ_2 tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \mu_1\alpha^n + \mu_2\beta^n$

d. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Interpréter le résultat.

6. Montrer qu'il n'existe qu'une seule loi de probabilité invariante (état stable) associée à la chaine $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$