Code de partage avec Capytale : 17a2-9457404

On utilisera les bibliothèques suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Illustration sur un exemple

Doudou le hamster passe son temps entre ses trois activités favorites : dormir, manger et faire du sport dans sa roue. Au début de la journée, il mange, et à chaque heure, il change d'activité selon les critères suivants.

- si, à l'heure n, il est en train de manger, alors il va dormir l'heure suivante avec probabilité $0,7$ et faire de l'exercice avec probabilité $0,3$
- si, à l'heure n, il est en train de dormir, alors il continue à dormir l'heure $n+1$ avec probabilité $0,4$, il va manger avec probabilité $0,3$ et il va faire de l'exercice avec probabilité $0,3$
- si, à l'heure n, il est en train de faire de la roue, il va manger l'heure suivante avec probabilité $0,5$ et il va dormir avec probabilité $0,5$

On s'intéresse ici à l'évolution du comportement de Doudou. On souhaite notamment déterminer si l'une de ses activités prendra, à terme, le dessus sur les autres.

Modélisation mathématique

On modélise ce problème comme suit :

- on commence par numéroter les activités par un entier entre 1 et 3
- on note X_n la v.a.r. égale à l'état du hamster à l'heure n

Ainsi, la suite de v.a.r. (X_n) représente l'évolution des activités du hamster.

- Cette évolution peut être modélisée par un graphe, que l'on représentera.
- On définit enfin la matrice de transition A associée au problème. Il s'agit de la matrice :

$$A = (a_{i,j}) \text{ où } a_{i,j} = P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j)$$

($a_{i,j}$ représente la probabilité de passage de l'état i à l'état j)

1 Etude de la matrice de transition

1. Déterminer $P_{[X_0=i]}(X_1 = j)$
   A quel coefficient de la matrice A cela correspond-il ?
2. Déterminer la matrice de transition du problème.
   Ecrire, avec Python, la commande permettant de la définir et la stocker dans une variable `A`

2 Etude de l'évolution du comportement du hamster

Dans la suite, on considère la matrice ligne U_n qui définit la loi de X_n :
$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$

3. Déterminer la probabilité $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3)$ et des coefficients de la matrice A
4. Déterminer de même $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A$
   Exprimer enfin U_n en fonction de A et de U_0
5. Que réalise l'opération `A*A` ? Et l'opération `A**2` ?
   Calculer alors A^5, A^{10} et A^{20}. Que remarque-t-on ?
6. Ecrire une fonction `simuMarkovEtape(x0,A)` qui prend en paramètre l'état initial `x0` et la matrice de transition `A` et renvoie une simulation de la v.a.r. X_1
7. Evaluer `simuMarkovEtape(2,A)` une dizaine de fois de suite.
   Le résultat obtenu paraît-il cohérent ?
8. Ecrire une fonction `simuMarkov(x0,A,n)` qui prend en paramètre l'état initial `x0` et la matrice de transition `A` et renvoie une simulation de la v.a.r. X_n

3 Comportement asymptotique du hamster

On souhaite conjecturer le comportement de la loi de X_n lorsque $n \to +\infty$
Pour ce faire, on compare :
- la valeur théorique de U_n (loi de X_n) pour n grand
- une valeur approchée de U_n obtenue en recueillant les effectifs de chaque état à la suite de N simulations de trajectoires de taille n

9. Partant de l'état initial `x0`, par quelle commande obtient-on U_n ?
10. Compléter et exécuter le programme suivant.

```
# Valeur des paramètres
N = 1000
n = 50
x0 = 2
# Distribution théorique
P =
# Valeurs observées
Obs = [... for k in range(N)]
# Tracés des histogrammes
cl = [0.5, 1.5, 2.5, 3.5]
# Diagramme des fréquences observées
plt.hist(Obs, bins = cl)
```

On pourra le compléter encore pour faire apparaitre la distribution théorique

11. Expliquer le fonctionnement de la fonction `plt.hist` du programme précédent.
12. Quel diagramme obtient-on si l'on part intialement avec un autre état `x0` ?
13. Que peut-on en conclure sur le comportement à terme du hamster ?
14. Si l'on est capable de démontrer que la suite (U_n) converge vers une limite notée U, quelle relation peut-on établir entre U et A ?