Corrigés ou éléments de corrigés

Densité, espérance, variance et quelques opérations

Exercice 6 - densité, opérations sur les variables aléatoires

On pose $f(x) = \lambda(1-x)$ pour $x \in]0,1[$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$, où λ désigne un réel.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

On trouve $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lambda\left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\lambda}{2}$

2. En déduire la valeur de λ pour que f soit une densité de probabilité.
On conservera cette valeur pour λ pour la suite de l'exercice.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$ si et seulement si $\lambda = 2$
Dans ce cas, f est aussi positive et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, et admet des limites finies à gauche et à droite de 0 et de 1, donc définit une densité de probabilité.

3. Si X est une variable aléatoire de densité f, déterminer sa fonction de répartition F_X, son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$

f est une densité de X (et admet des limites finies à droite et à gauche en tout point) donc pour $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

- Si $x < 0$: f est nulle sur $]-\infty, x]$ donc $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x 2(1-t)\mathrm{d}t = \left[-(1-t)^2\right]_0^x = 1-(1-x)^2$
  donc $F_X(x) = 2x - x^2 = x(2-x)$
- Si $x > 1$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = 1$
- Conclusion :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x(2-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}}$$

Par ailleurs X admet une espérance et un moment d'ordre 2 car f est nulle en dehors de $[0,1]$
et $E(X) = \displaystyle\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t(1-t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t-t^2)\mathrm{d}t = 2\times\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
de manière analogue :
$E(X^2) = \displaystyle\int_0^1 t^2f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^2(1-t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t^2-t^3)\mathrm{d}t = 2\times\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = 2\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$
donc, d'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet une variance
et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{1}{6} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{3}{18} - \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{18}$

4. Pour chacune des variables suivantes, montrer qu'elle est à densité et en déterminer la fonction de répartition ainsi qu'une densité :

$$Y_1 = 1+X, \quad Y_2 = 1-X, \quad Y_3 = \sqrt{X}, \quad Y_4 = \ln(X), \quad Y_5 = X^2, \quad Y_6 = \exp(X)$$

Rappels

▷ *On détermine la loi de chaque variable en déterminant la fonction de répartition.*

▷ *Une variable est à densité si sa fonction de répartition F est C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.*

▷ *On détermine une densité pour une variable à densité en dérivant sa fonction de répartition et en donnant des valeurs positives à F' aux points où F n'est pas C^1.*

a) Pour Y_1 :
Fonction de répartition.
Pour $x \in \mathbb{R}$: $F_{Y_1}(x) = P(Y_1 \leqslant x) = P(X \leqslant x - 1)$.
On obtient :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-1<0 \\ (x-1)(2-(x-1)) & \text{si } 0 \leqslant x-1 \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x-1>1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ (x-1)(3-x) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points.

F_{Y_1} est de classe C^1

sur $]-\infty,1[$: fonction nulle,
sur $]1,2[$: fonction polynomiale,
sur $]2,+\infty[$: fonction constante,

donc $\boxed{F_{Y_1} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{1,2\}}$.

Continuité sur $\mathbb{R}$ de F_{Y_1} :
En 1 : $\lim\limits_{x\to 1-} F_{Y_1}(x) = \lim\limits_{x\to 1-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1+} F_{Y_1}(x) = \lim\limits_{x\to 1+} (x-1)(3-x) = 0 = F_{Y_1}(1)$ donc F_{Y_1} est continue en 1
En 2 : $\lim\limits_{x\to 2-} F_{Y_1}(x) = \lim\limits_{x\to 2-} (x-1)(3-x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 2+} F_{Y_1}(x) = \lim\limits_{x\to 2+} 1 = 1 = F_{Y_1}(2)$ donc F_{Y_1} est continue en 2.

Comme on sait déjà que F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$, car $\mathscr{C}^1$, $\boxed{F_{Y_1} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$.

Conclusion : $\boxed{Y_1 \text{ est une variable à densité.}}$.

Comme une densité de Y_1 coïncide avec F'_{Y_1} sur $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$, on peut choisir pour densité : f_{Y_1} définie par :

$$f_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ -2x+4 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Remarque : on aurait pu conclure directement que F_{Y_1} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points et $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ tout entier par composition, puisque $F_{Y_1}(x) = F_X(x-1)$ pour tout x puis trouver une densité en dérivant. Dans des cas simples, comme celui-ci, c'est plus rapide ; dans des cas plus compliqués, il faudra faire attention à la dérivation composée et aux points où elle est valide (source d'erreurs).

b) Pour Y_2.
Fonction de répartition.
Pour $x \in \mathbb{R}$: $F_{Y_2}(x) = P(X \geqslant 1-x)$.
Comme X est à densité : $F_{Y_2}(x) = P(X > 1-x) = 1 - P(X \leqslant 1-x) = 1 - F_X(1-x)$ On obtient :

$$F_{Y_2}(x) = \begin{cases} 1-0 & \text{si } 1-x<0 \\ 1-(1-x)(2-(1-x)) & \text{si } 0 \leqslant 1-x \leqslant 1 \\ 1-1 & \text{si } 1-x>1. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x>1. \end{cases}$$

Classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points.

F_{Y_2} est de classe C^1

sur $]-\infty, 0[$: fonction nulle,
sur $]0,1[$: fonction polynomiale,
sur $]1,+\infty[$: fonction constante,

donc $\boxed{F_{Y_2} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{0,1\}}$.

Continuité sur $\mathbb{R}$ de F_{Y_1} :

En 0 : $\lim\limits_{x\to 0-} F_{Y_2}(x) = \lim\limits_{x\to 0-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} F_{Y_2}(x) = \lim\limits_{x\to 0+} x^2 = 0 = F_{Y_2}(0)$ donc F_{Y_2} est continue en 0

En 1 : $\lim\limits_{x\to 1-} F_{Y_2}(x) = \lim\limits_{x\to 1-} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1+} F_{Y_2}(x) = \lim\limits_{x\to 1+} 1 = 1 = F_{Y_2}(1)$ donc F_{Y_2} est continue en 1.

Comme on sait déjà que F_{Y_2} est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, car $\mathscr{C}^1$, $\boxed{F_{Y_2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$.

Conclusion : $\boxed{Y_2 \text{ est une variable à densité.}}$.

Comme une densité de Y_2 coïncide avec F'_{Y_2} sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, on peut choisir pour densité : f_{Y_2} définie par :

$$f_{Y_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 2x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

c) Pour Y_3

Fonction de répartition :

Pour $x \in \mathbb{R}$: $F_{Y_3}(x) = P(\sqrt{X} \leqslant x)$.

- Pour $x < 0$: $[\sqrt{X} \leqslant x]$ est impossible, donc $F_{Y_3}(x) = 0$.
- Pour $x \geqslant 0$: $F_{Y_3}(x) = P(X \leqslant x^2) = F_X(x^2)$ (par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$)
  Comme $x^2 \geqslant 0$, on obtient :

$$F_{Y_3}(x) = \begin{cases} x^2(2-x^2) & \text{si } 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x^2 > 1 \end{cases}$$

  et comme $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2} = x$, donc :

$$F_{Y_3}(x) = \begin{cases} x^2(2-x^2) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{F_{Y_3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2(2-x^2) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}}$

F_{Y_3} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, et F_{Y_3} est $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ (à rédiger comme pour Y_1 et Y_2), donc Y_3 est à densité et on peut choisir pour densité :

$$f_{Y_3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

d) Pour Y_4

Pour $x \in \mathbb{R}$: $F_{Y_4}(x) = P(\ln(X) \leqslant x) = P(X \leqslant e^x)$. (par croissances des fonctions ln et exp)

On obtient :

$$F_{Y_4}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x < 0 \quad \longrightarrow \text{impossible} \\ e^x(2-e^x) & \text{si } 0 \leqslant e^x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } e^x > 1 \end{cases}$$

donc :

$$\boxed{F_{Y_4}(x) = \begin{cases} e^x(2-e^x) = 2e^x - e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}}$$

F_{Y_4} est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, F_{Y_4} est $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ (à rédiger comme pour le reste), donc Y_4 est à densité et on peut choisir pour densité :

$$f_{Y_4}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 2e^x - 2e^{2x} = 2e^x(1-e^x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

e) Pour Y_5

Pour $x \in \mathbb{R}$: $F_{Y_5}(x) = P(X^2 \leqslant x)$

- Pour $x < 0$: $[X^2 \leqslant x]$ est impossible, donc $F_{Y_5}(x) = 0$
- Pour $x \geqslant 0$: $F_{Y_5}(x) = P(X \leqslant \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x})$ (par croissance des fonctions carré et racine sur $\mathbb{R}_+$)

  Comme $\sqrt{x} \geqslant 0$, on obtient :

$$F_{Y_5}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}(2-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - x & \text{si } 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } \sqrt{x} > 1. \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{F_{Y_5}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\sqrt{x} - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$

F_{Y_5} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ (à rédiger, par opérations sur les fonctions), donc Y_5 est à densité et on peut choisir pour densité :

$$f_{Y_5}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]0,1] \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

⚠ Ici, f_{Y_5} admet une limite infinie en $0+$.

On ne pourra **pas** écrire (dans le cadre du programme) : $\mathbf{P}(Y_5 \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_{Y_5}(t)\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

Par contre, par exemple, Y_5 admet bien une espérance avec :

$E(Y_5) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_5}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (\sqrt{t} - t)\mathrm{d}t$.

f) Pour Y_6

Pour $x \in \mathbb{R}$: $F_{Y_6}(x) = P(e^X \leqslant x)$

- Pour $x \leqslant 0$: $[e^X \leqslant x]$ est impossible, donc $F_{Y_6}(x) = 0$
- Pour $x > 0$: $F_{Y_6}(x) = P(X \leqslant \ln(x)) = F_X(\ln x)$ (par croissance de ln et exp)

  On obtient :

$$F_{Y_6}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ln(x) < 0 \\ \ln(x)(2-\ln(x)) & \text{si } 0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } \ln(x) > 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{F_{Y_6}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \ln(x)(2-\ln(x)) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant e \\ 1 & \text{si } x > e \end{cases}}$

F_{Y_6} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1, e\}$ et $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ (à rédiger, par opérations sur les fonctions), donc Y_6 est à densité et on peut choisir pour densité :

$$f_{Y_6}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]1, e] \\ \dfrac{2 - \ln(x)}{x} & \text{si } x \in]1, e] \end{cases}$$

Autres exemples de lois

Exercice 1 - loi Gamma (Essec - HEC)

On pose , pour $\alpha > 1$: $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, et $f_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

1. Vérifier que $\Gamma(\alpha)$ est bien définie pour $\alpha \geqslant 1$
2. Vérifier que f_α est une densité de probabilité, pour $\alpha \geqslant 1$
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha \geqslant 1$.
4. Montrer que, si X est de densité f_α, X admet une variance et :

$$E(X) = \alpha \qquad \text{et} \qquad V(X) = \alpha$$

Exercice 2 (*difficile*)

Soit X une variable à densité de densité f vérifiant : $f(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$, et f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant une limite finie en 0^+

Soit F la fonction de répartition de X. On note $R(x) = 1 - F(x)$ pour $x \geqslant 0$

1. Montrer que, pour $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t + AR(A) = \int_0^A R(t)\mathrm{d}t$
2. On suppose dans cette question que $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$ converge.
   - **a.** Vérifier que : $\forall A > 0, \quad \displaystyle\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$
   - **b.** En déduire que :
     - i. X admet une espérance
     - ii. $E(X) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$
     - iii. $xR(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
3. On suppose dans cette question que X admet une espérance.
   - **a.** Justifier que : $\forall A > 0, \quad \displaystyle\int_A^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \geqslant AR(A) \geqslant 0$
   - **b.** En déduire que : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} AR(A) = 0$, puis que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$
4. Déduire des deux questions précédentes que X admet une espérance si, et seulement si : $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$ converge et dans ce cas : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\mathrm{d}t$

Opérations sur les variables aléatoires (et simulation Python)

Exercice 3 - transformations affines (classique)

On considère une variable aléatoire réelle X

1. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$
   Déterminer la fonction de répartition de $Y = 3X - 2$. Est-ce que Y est une variable à densité ?
2. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre 3
   Déterminer la fonction de répartition de $Y = 2X + 1$. Est-ce que Y est une variable à densité ?
3. On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$
   On pose $Y = aX + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Justifier que Y admet une espérance et une variance et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$
   Quelle loi suit la variable Y ?

Exercice 11 - fonction de répartition de X^2 (classique)

Déterminer la fonction de répartition de X^2, et vérifier que X^2 est à densité dans les cas suivants :

1. X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([-1,1])$

   Dans tous les cas (valable quelle que soit la variable aléatoire X) :
   - pour $x < 0$: $P(X^2 \leqslant x) = 0$
   - pour $x \geqslant 0$: $P(X^2 \leqslant x) = P(|X| \leqslant \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

   <u>Cas où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$</u>

   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1+x}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{donc } F_X(\sqrt{x}) = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   $$\text{et } F_X(-\sqrt{x}) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \boxed{F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

   <u>Remarque</u> : X^2 est à densité.

2. X suit la loi exponentielle de paramètre 1

   <u>Cas où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$</u>

   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   donc : $F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\sqrt{x}}$ car $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $F_X(-\sqrt{x}) = 0$, d'où :

   $$\boxed{F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

Exercice 12 - fonction de répartition d'un minimum, d'un maximum

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y et on pose $U = \min(X,Y)$, $V = \max(X,Y)$.

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$: $[U \geqslant a] = [X \geqslant a] \cap [Y \geqslant a]$ et $[V \leqslant a] = [X \leqslant a] \cap [Y \leqslant a]$

Dans tous les cas (en passant aux probabilités à partir des égalités précédentes) :
$P(U \leqslant x) = 1 - P(U > x) = 1 - P(X > x)P(Y > x)$ car X et Y sont indépendantes.

et $P(V \leqslant x) = P(U \leqslant x)P(V \leqslant x)$ car X et Y sont indépendantes.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\begin{array}{l} F_U(x) = 1 - (1 - F_X(x))\,(1 - F_Y(x)) \\ F_V(x) = F_X(x)F_Y(x) \end{array}}$

1. On suppose dans cette question que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ avec $\lambda > 0, \mu > 0$
   Déterminer les fonctions de répartition de U et de V. Ces variables sont-elles à densité ?

   Cas où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$.
   On a, pour $x > 0$, $1 - F_X(x) = P(X > x) = e^{-\lambda x}$ et $1 - F_Y(x) = P(Y > x) = e^{-\mu x}$ et $F_U(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}e^{-\mu x} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

   <u>Conclusion</u> : $U = \min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda + \mu)$

2. On suppose dans cette question que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$
   Déterminer les fonctions de répartition de U et de V. Ces variables sont-elles à densité ?

   Cas où X et Y suivent la même loi $\mathcal{U}([0, 1])$.
   Dans ce cas (après calculs à faire) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = 1 - (1 - F_X(x))^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-x)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et } F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 13 - fonction de répartition et simulation Python : méthode d'inversion

Les questions **1.**, **2.** et **3.** sont indépendantes

1. On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$. On pose $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$, avec $\lambda > 0$
   Montrer que Y suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$
2. (HEC) Plus généralement, on suppose que f est une densité vérifiant $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et f est nulle sur $\mathbb{R}_-$
   - **a.** Justifier que la fonction de répartition F associée à f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[0, 1[$
     On note G la fonction réciproque de cette fonction, c'est-à-dire la fonction définie sur $[0, 1[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et vérifiant :
     $$\forall y \in [0, 1[, \quad F(G(y)) = y$$
   - **b.** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0, 1[$. Montrer que $Y = G(X)$ a pour fonction de répartition F
3. <u>Application (tous concours)</u>

   On pose $f(t) = 2te^{-t^2}$ pour $t > 0$, et $f(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$
   - **a.** Vérifier que f est une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire de densité f
   - **b.** Déterminer $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis $G(y) = F^{-1}(y)$ pour $y \in [0, 1[$
   - **c.** Ecrire un code Python permettant de simuler la loi de X

Avec des lois usuelles

Exercice 14 - (classique)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\lambda_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x$

1. Convergence de λ_n
   - **a.** Justifier que λ_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. Déterminer la valeur de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. On pourra se référer à des résultats connus sur la loi exponentielle.

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $\lambda_{n+1} = (n+1)\lambda_n$
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = n!$

Dans la suite, on pose : $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}x^n e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

2. Montrer que f_n est une densité de probabilité.

3. Si X_n est une variable aléatoire de densité f_n, déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ en fonction de n

Exercice 15 - classique (EML et Edhec, loi normale)

Soit $\lambda > 0$. On pose $f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Si X est une variable aléatoire de densité f, déterminer sa fonction de répartition notée F_X

3. **a.** Déterminer le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{2\lambda}\right)$

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x$

c. En déduire que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$

4. Soit $Y = \lambda X^2$. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1
Rappeler la valeur de $E(Y)$ puis en déduire que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{(4-\pi)}{4\lambda}$

Exercice 16 (Ecricome, loi uniforme)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([0,1])$, uniforme sur $[0,1]$
On note F la fonction de répartition associée à cette loi.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \max(X_1, \dots X_n)$ et on note F_n sa fonction de répartition.

1. Montrer que, pour $z \in \mathbb{R}$, $F_n(z) = F(z)^n$

2. En déduire que Z_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité f_n

3. Montrer que Z_n admet une espérance et une variance, et les calculer.

Exercice 17 - loi de Pareto (classique, EML, Edhec, Ecricome)

Soit a, b deux réels strictement positifs, et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{ab^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

- $f_{a,b}$ est clairement $\boxed{\text{positive sur } \mathbb{R}}$
- $f_{a,b}$ est continue sur $]-\infty, b[$ (fonction nulle) et sur $]b, +\infty[$ (fonction puissance), donc $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}\backslash\{b\}}$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = b^a \int_b^{+\infty} \frac{a}{x^{a+1}}\mathrm{d}x$ sous réserve de convergence de la dernière intégrale. Pour $A > b$, $\displaystyle\int_b^{A} \frac{a}{x^{a+1}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^a}\right]_b^A = \frac{1}{b^a} - \frac{1}{A^a}$ donc $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{a}{x^{a+1}}\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{b^a}$

  Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_{\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } 1.}$

De ces trois points : $\boxed{f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité.}}$

Dans la suite, on dira d'une variable aléatoire de densité $f_{a,b}$ qu'elle suit la **loi de Pareto** $\mathcal{P}(a,b)$ **de paramètres** (a,b)

On considère dans la suite une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto $\mathcal{P}(a,b)$

2. Déterminer la fonction de répartition, notée $F_{a,b}$, de X

Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_{a,b}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{a,b}(t)\mathrm{d}t$

- Pour $x < b$, $F_{a,b}(x) = 0$ car $f_{a,b}$ est nulle sur $]-\infty, x]$
- Pour $x \geqslant b$, des calculs faits pour la question **1.** on déduit : $F_{a,b}(x) = \displaystyle\int_b^x f_{a,b}(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{b^a}{x^a}$

donc : $\boxed{F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geqslant b \end{cases}}$

3. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si : $a > 1$ et, dans ce cas : $E(X) = \dfrac{ab}{a-1}$

Comme $f_{a,b}$ est nulle sur $]-\infty, b[$, X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_b^{+\infty} t f_{a,b}(t)\mathrm{d}t$ converge.

or $\displaystyle\int_b^{+\infty} t f_{a,b}(t)\mathrm{d}t = \int_b^{+\infty} \frac{ab^a}{t^a}\mathrm{d}t$ et on sait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $a > 1$, donc par linéarité $\displaystyle\int_b^{+\infty} t f_{a,b}(t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $a > 1$, soit :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance si et seulement si } a > 1}$$

et pour $a > 1$ et $A > b$ (calcul d'une intégrale de Riemann, au facteur près),

$\displaystyle\int_b^{A} t f_{a,b}(t)\mathrm{d}t = ab^a \int_b^A \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t = ab^a\left[-\frac{1}{(a-1)t^{a-1}}\right]_b^A = \frac{ab^a}{a-1} \times \left(\frac{1}{b^{a-1}} - \frac{1}{A^{a-1}}\right)$

en faisant tendre A vers $+\infty$: $\boxed{E(X) = \dfrac{ab^a}{a-1} \times \dfrac{1}{b^{a-1}} = \dfrac{ab}{a-1}}$

4. Montrer que X admet une variance si, et seulement si : $a > 2$ et, dans ce cas : $V(X) = \dfrac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$

X admet un moment d'ordre 2 ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{t^{a-1}}\mathrm{d}t$ converge, donc ssi (comme à la question précédente) : $\boxed{a > 2}$, et dans ce cas, par un calcul analogue à la question précédente :

$$\boxed{E(X^2) = ab^a \times \frac{1}{a-2}\frac{1}{b^{a-2}} = \frac{ab^2}{a-2}}$$

donc X admet une variance ssi $a>2$ et : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\dfrac{ab^2}{a-2}-\dfrac{a^2b^2}{(a-1)^2}$

donc $V(X)=\dfrac{ab^2\left((a-1)^2-a(a-2)\right)}{(a-2)(a-1)^2}$ et donc $\boxed{V(X)=\dfrac{ab^2}{(a-2)(a-1)^2}}$

5. Simulation informatique.

a. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1[)$
Montrer que $bU^{-1/a}$ suit la loi de Pareto $\mathcal{P}(a,b)$

On remarque d'abord que $U(\Omega)=]0,1[$ et donc $U^{-1/a}(\Omega)=]1,+\infty[$, donc $V>b$
(on a utilisé $x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$) on en déduit que $P(V\leqslant x)=0$ pour $x\leqslant b$

pour $x>b$: $P(V\leqslant x)=P\left(U^{-1/a}\leqslant\dfrac{x}{b}\right)=P\left(U\geqslant\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\right)=1-F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\right)$

et $0<\dfrac{b}{x}<1$ donc $F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\right)=\left(\dfrac{b}{x}\right)^a$

Finalement : $F_V(x)=P(V\leqslant x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant b\\ 1-\left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si } x>b\end{cases}$

et donc $\boxed{V \text{ suit la loi de Pareto de paramètres } (a,b)}$

b. En déduire une fonction Python d'en tête `def Pareto(a, b):` permettant de simuler une réalisation de la loi de pareto $\mathcal{P}(a,b)$

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def Pareto(a, b):
  return b*rd.rand()**(-1/a)
```

Exercice 18 - loi logistique standard et opérations sur les variables aléatoires (classique)

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

1. Etudier les variations de F et préciser ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$
   Justifier que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, dont on précisera une densité f (on montrera que F vérifie les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition).
   La loi de X est appelée *loi logistique standard*.
2. On considère une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 1, et on pose $W = \ln(\exp(T) - 1)$
   - **a.** Rappeler la fonction de répartition F_T de T
   - **b.** Montrer que W suit la loi logistique standard.
3. On considère une variable aléatoire U à densité suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$
   - **a.** Montrer que $V = -\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1
   - **b.** Déduire de la question **2.b.** que $Y = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ suit la loi logistique standard.
   - **c.** En déduire une instruction Python (en une ligne) permettant de simuler la loi logistique standard.
4. On suppose que X_1 et X_2 sont deux variables indépendantes de même loi que X (loi logistique standard). On note $M = \max(X_1, X_2)$
   Montrer que M est une variable à densité, et déterminer une densité associée.
5. On pose $Z = |X|$ avec toujours X suivant la loi logistique standard, de fonction de répartition $F_X = F$
   On note F_Z la fonction de répartition de la variable aléatoire Z
   - **a.** Soit $x \geqslant 0$. Exprimer $P[Z \leqslant x]$ à l'aide de F et de x
   - **b.** En déduire que Z est une variable à densité et déterminer une densité associée.

Quelques extraits d'annales

Exercice 19 (Ecricome) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. **Etude de la fonction g**
   - **a.** Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
   - **b.** Donner le tableau des variations de g sur $[0, +\infty[$. On précisera la limite de g en $+\infty$
   - **c.** Etudier la convexité de g
2. **Etude de variables aléatoires**
   - **a.** Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.
     On notera Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G
   - **b.** Sans calcul, montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
   - **c.** Montrer que, pour tout réel x, $\quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
   - **d.** Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.
3. On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$
   - **a.** Déterminer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z

b. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité de Z

c. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

Exercice 20 (Edhec)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$
On suppose que :
- X est une variable à densité,
- la loi de Y est donnée par : $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(Y=1) = P(Y=-1) = \dfrac{1}{2}$

On rappelle que l'indépendance de X et Y se traduit par les égalités vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P([X \leqslant x] \cap [Y=1]) = P(X \leqslant x)P(Y=1) \quad \text{et} \quad P([X \leqslant x] \cap [Y=-1]) = P(X \leqslant x)P(Y=-1)$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est une variable aléatoire sur le même espace probabilisé.
Pour une variable aléatoire A, on notera F_A sa fonction de répartition.

1. En utilisant le système complet d'événement $\{[Y=1], [Y=-1]\}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right)$$

En déduire que Z est une variable aléatoire à densité, et exprimer une densité f_Z de la loi de Z en fonction d'une densité f_X de la loi de X

2. On suppose que X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que Z suit aussi la loi normale centrée réduite.

3. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$

a. Rappeler l'expression de $F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et donner une densité f_X de la loi de X

b. Montrer que Z suit une loi uniforme que l'on précisera.

4. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1

a. Rappeler l'expression de $F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et donner une densité f_X de la loi de X

b. Calculer $E(Z)$

c. Exprimer Z^2 en fonction de X. En déduire que Z admet une variance et calculer $V(Z)$

d. Montrer que la loi de Z a pour densité f_Z définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

e. Rappeler les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$
En déduire successivement les valeurs des l'intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} \mathrm{d}x$
Retrouver alors la valeur de $\mathbf{V}(Z)$ par un autre calcul que celui fait dans la question **4.c.**.

Exercice 21 (Ecricome)

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \leqslant -1 \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f est paire.

2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

3. **a.** A l'aide d'un changement de variable, montrer que :
pour tout réel $A > 1$: $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt = \int_1^A f(u)\ du$
En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

b. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X

a. Montrer que, pour tout réel x : $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

b. Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$

a. Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b. Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par : $f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y
Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$

a. Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D

b. Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

c. Montrer que pour tout réel x : $P(T \leqslant x) = \dfrac{1}{2}P(Y \leqslant x) + \dfrac{1}{2}P(Y \geqslant -x)$

d. En déduire la fonction de répartition de T

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$ et V la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$

a. Rappeler la fonction de répartition de U

b. Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variable V et Y suivent la même loi.

8. Ecrire une fonction en langage `Python`, d'en-tête `def T(n)`, qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire T