Sujet 1 : type Ecricome - EML

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Corrigé *Total sur 84 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points*

Exercice 1

24 points

Partie 1 : loi de Pareto

On pose, pour $\alpha > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Toutes les variables seront supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour une variable aléatoire X, on notera F_X sa fonction de répartition, et on notera $R_X = 1 - F_X$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_X(x) = 1 - F_X(x)$$

1. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, f_α est une densité de probabilité. *1,5 points*

- f_α est positive sur $\mathbb{R}$
- f_α est continue sur $]-\infty, 1[$ (fonction nulle) et sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction puissance (quelconque) donc f_α est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un point)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f_\alpha(t)\mathrm{d}t = 0$ (l'intégrale converge et vaut 0) car f_α est nulle sur $]-\infty, 1[$

  Pour $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \alpha t^{-\alpha-1}\mathrm{d}t = \left[-t^{-\alpha}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^\alpha}$ et $1 - \dfrac{1}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ car $\alpha > 0$

  En conclusion, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f_\alpha(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t = 1$

de ces trois points, on déduit que f_α est une densité de probabilité.

La loi associée à cette densité est appelée loi de Pareto de paramètre α et on dira qu'une variable aléatoire de densité f_α suit la loi $\mathcal{P}(\alpha)$ (loi de Pareto).

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha)$, avec $\alpha > 0$

a. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si $\alpha > 1$. Calculer alors $E(X)$ *1,5 points*

Par définition, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge (car f_α est nulle sur $]-\infty, 1[$)

donc d'après le critère de convergence des intégrales de Riemann, X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas : $E(X) = \alpha \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$

et pour $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1}$ (car $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0$) donc $\boxed{E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}}$

b. Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$, et vérifier que, dans ce cas, *2 points*

$$V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2,
donc si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \alpha \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t$ converge
donc, comme pour la question précédente, cette dernière intégrale converge si et seulement si $\alpha > 2$, et le cas échéant elle vaut $\dfrac{1}{\alpha-2}$
donc X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$ et dans ce cas, d'après le théorème de transfert $E\left(X^2\right) = \dfrac{\alpha}{\alpha-2}$
donc d'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$ et dans ce cas : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \dfrac{\alpha}{\alpha-2} - \left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)^2 - \alpha^2(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$

$$= \frac{\alpha(\alpha^2-2\alpha+1) - \alpha(\alpha^2-2\alpha)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \quad \text{d'où le résultat} \quad \boxed{V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}}$$

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha)$, avec $\alpha > 0$

a. Pour tout réel x, déterminer une expression de $F_X(x)$ et de $R_X(x)$ (on distinguera les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$). *1,5 points*

Puisque f_α est une densité, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ et puisque f_α est nulle sur $]-\infty, 1[$
donc d'après les calculs faits en question **1**,

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^\alpha} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}} \quad \text{de fait} \quad \boxed{R_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^\alpha} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

b. Montrer que, pour $a > 1$ et $b > 0$: $P_{[X>a]}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^\alpha$ *1,5 points*

Par définition (des probabilités conditionnelles car $a > 1 \Rightarrow P(X > a) = R(a) > 0$),

$$P_{[X>a]}(X > a+b) = \frac{P([X > a+b] \cap [X > a])}{P(X > a)} = \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} = \frac{R_X(a+b)}{R_X(a)} = \frac{\frac{1}{(a+b)^\alpha}}{\frac{1}{a^\alpha}} = \frac{a^\alpha}{(a+b)^\alpha}$$

donc $\boxed{P_{[X>a]}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^\alpha}$

c. Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} P_{[X>a]}(X > a+b)$ *1 point*

Puisque $a \neq 0$, $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{a} \times \dfrac{1}{1+\frac{b}{a}} = \dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}$ et $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{a}{a+b} = 1$
de plus $X \mapsto X^\alpha$ est continue donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \left(\frac{a}{a+b}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$, i.e. $\boxed{\displaystyle\lim_{a\to+\infty} P_{[X>a]}(X > a+b) = 1}$

d. En supposant que X désigne la durée de vie d'un composant, que signifie cette valeur limite ? *1 point*

Cela signifie que plus le composant a une durée de vie longue, moins il a de chance de tomber en panne : s'il a vécu a unité de temps avec a assez grand, la probabilité qu'il dure $a+b$ avec $b > 0$ quelconque est proche de 1. Cela correspond à une durée de vie avec rajeunissement, mieux qu'une loi exponentielle.

Partie 2 : simulation informatique

4. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
Montrer que la variable $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ *2,5 points*

Voir l'exemple du cours. On pose $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$:
Soit $y \in \mathbb{R}$ alors (on utilise $\lambda > 0$ et la croissance d'exponentielle et ln)

$Y \leqslant y \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant y \Leftrightarrow -\ln(1-U) \leqslant \lambda y \Leftrightarrow \ln(1-U) \geqslant -\lambda y \Leftrightarrow 1-U \geqslant e^{-\lambda y} \Leftrightarrow U \leqslant 1-e^{-\lambda y}$
donc $P(Y \leqslant y) = P(U \leqslant 1-e^{-\lambda y})$ i.e. $F_Y(y) = F_U(1-e^{-\lambda y})$
<u>1^er^ cas</u> : $y \geqslant 0$ alors $-\lambda y \leqslant 0$ donc $0 \leqslant e^{-\lambda y} \leqslant 1$ donc $1 \geqslant 1-e^{-\lambda y} \leqslant 0$
et donc $F_U(1-e^{-\lambda y}) = 1-e^{-\lambda y}$ car $F_U(x) = x$ si $x \in [0,1]$ i.e. $F_Y(y) = 1-e^{-\lambda y}$
<u>2^ème^ cas</u> : $y < 0$ alors de même $1-e^{-\lambda y} < 0$ et donc $F_U(1-e^{-\lambda y}) = 0$ i.e. $F_Y(y) = 0$

finalement $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ 1-e^{-\lambda y} & \text{si} \quad y \geqslant 0 \end{cases}$

on retrouve pour Y la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$

5. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ *2 points*
Montrer que la variable e^Y suit la loi de Pareto de paramètre λ

Si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Z = e^Y$, on constate que $Y \geqslant 0$ donc $Z \geqslant 1$
Pour $x < 1$ on a donc $P(Z \leqslant x) = 0$ et pour $x \geqslant 1$:
$Z \leqslant x \Leftrightarrow e^Y \leqslant x \Leftrightarrow Y \leqslant \ln(x)$ par croissance de ln et exp
donc $P(Z \leqslant x) = P(Y \leqslant \ln(x))$ i.e. $F_Z(x) = F_Y(\ln(x)) = 1-e^{\lambda\ln(x)} = 1-\dfrac{1}{x^\lambda}$ car $x \geqslant 1 \Rightarrow \ln(x) \geqslant 0$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on retrouve donc la fonction de répartition de la loi de Pareto de paramètre λ trouvée à la question **3.a.** donc $\boxed{Z \text{ suit bien la loi de Pareto de paramètre } \lambda}$

6. En déduire une commande Python permettant de simuler une réalisation de la loi de Pareto de paramètre λ *1,5 points*

Avec l' `import rd.random as rd` et `rd.random()`, on simule la loi uniforme sur $[0,1[$ donc d'après les questions précédentes puisque : $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et donc $Z = e^Y = \dfrac{1}{(1-U)^{1/\lambda}} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
alors `z=1 /(1-rd.random()) * *(1 / lambda)` simulera une réalisation de $\mathcal{P}(\lambda)$, pour `lambda` donné.

Partie 3 : questions de convergence

On suppose dans cette partie que α est un réel strictement supérieur à 2 et X une variable suivant la loi de Pareto de paramètre α
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoire indépendantes et de même loi que X (loi de Pareto de paramètre $\alpha > 2$).

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, U_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $T_n = c_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ où c_n est un réel.

7. **a.** Déterminer la valeur de c_n pour que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(T_n) = 1$ *1,5 points*

Par linéarité de l'espérance, $E(T_n) = c_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = c_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{\alpha-1} = c_n \times \frac{n\alpha}{\alpha-1}$

donc on doit avoir $\boxed{c_n = \dfrac{\alpha-1}{n\alpha} = \dfrac{1}{nE(X)}}$ pour que $E(T_n) = 1$

b. On suppose c_n choisi tel que $E(T_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *2 points*
Calculer alors $V(T_n)$ et sa la limite quand n tend vers $+\infty$

$V(T_n) = c_n^2 V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ par propriété

et comme $X_1, \ldots X_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X :

$V(T_n) = c_n^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = c_n^2 nV(X)$ soit $\boxed{V(T_n) = \dfrac{V(X)}{nE(X)^2}}$ d'après la question précédente et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V(T_n)=0}$ puisque $V(X)$ et $E(X)$ ne dépendent pas de n

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a. Déterminer $P(U_n > x)$ pour $x < 1$ *1 point*

$X_1, \ldots, X_n$ suivant des lois de Pareto, elles sont à valeurs dans $[1, +\infty[$ (i.e. $\forall k \in [\![1, n]\!], P(X_k < 1) = 0$ et donc $P(X_k \geqslant 1) = 1$)

donc le minimum est forcément plus grand que 1, i.e. $\boxed{P(U_n > x) = 1}$ pour $x < 1$

b. Montrer que, pour $x \geqslant 1, P(U_n > x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{n\alpha}$ *1,5 points*

Pour $x \in \mathbb{R}, x \geqslant 1, \min(X_1, \ldots, X_n) \geqslant x \Leftrightarrow X_1 \geqslant x$ et $X_2 \geqslant x$ et $\ldots X_n \geqslant x$

donc $[U_n > x] = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]$ donc $P((U_n > x) = P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right)$

donc par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, $\quad P(U_n > x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(X_k > x)$

soit $P(U_n > x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} R_X(x) = R_X(x)^n = \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^n = \frac{1}{x^{n\alpha}}$ on trouve bien $\boxed{P(U_n > x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{n\alpha}}$

c. Reconnaître alors la loi de U_n *2 points*

Justifier que U_n admet une espérance $E(U_n)$ et une variance $V(U_n)$ et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} E(U_n) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(U_n) = 0$$

On reconnait la fonction R d'une loi de Pareto de paramètre $n\alpha$, plus précisément

on déduit de **8.b.** : $F_{U_n}(x) = P(U_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^{n\alpha}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ et donc $\boxed{U_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\alpha)}$

de plus $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 2$ donc $n\alpha > 2$ et donc U_n admet un moment d'ordre 2 , donc une espérance et une variance.

et d'après les résultats de la question **2.**, $E(U_n) = \dfrac{n\alpha}{n\alpha - 1} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{n\alpha}}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(U_n) = 1}$,

et $V(U_n) = \dfrac{n\alpha}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)} = \dfrac{1}{(n\alpha)^2} \times \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{n\alpha}\right)}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V(U_n) = 0}$

Exercice 2

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base $\mathscr{B}$ par la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I_3 (resp. $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$) désignera la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. la matrice nulle), représentant l'endomorphisme identité id (resp. l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$) de $\mathbb{R}^3$ dans une base quelconque.

Partie I : étude de f

1. **a.** Calculer $(A - I_3)^3$ *1,5 points*

Par le calcul on trouve :

$$(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

puis $(A-I_3)^3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{(A-I_3)^3 = 0_3}$

b. En déduire que f est un isomorphisme et donner une expression de la matrice de f^{-1} en fonction de I_3, A et A^2 *2,5 points*

En développant la relation précédente, on obtient :
$(A-I_3)(A^2-2A+I_3) = 0_3$ donc $A^3-2A^2+A-A^2+2A-I_3 = 0_3$ soit $A^3-3A^2+3A = I_3$
donc $A\left(A^2-3A+3I_3\right) = I_3$
donc A est inversible, et $A^{-1} = A^2-3A+3I_3$

donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme}}$, et en définissant g par $A^{-1} = M_{\mathscr{B}}(g)$
alors $M_{\mathscr{B}}(f)M_{\mathscr{B}}(g) = M_{\mathscr{B}}(g)M_{\mathscr{B}}(f) = I_3$
donc par propriété sur les matrices de composées d'applications linéaires, $M_{\mathscr{B}}(g\circ f) = M_{\mathscr{B}}(f\circ g) = M_{\mathscr{B}}(id)$ donc par caractérisation d'une application linéaire $g\circ f = f\circ g = id$

donc $g = f^{-1}$ et de fait $\boxed{M_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = A^{-1} = A^2-3A+3I_3}$

2. Montrer que A admet une seule valeur propre et que le sous-espace propre associé est de dimension 1 *2,5 points*

$(X-1)^3$ est un polynôme annulateur de A et admet 1 pour unique racine, donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\{1\}$
on résout alors le système linéaire $AX = X \Leftrightarrow (A-I_3)X = 0_3$ d'inconnue $X = {}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$:

$$AX = X \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \; L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; L_3 \leftrightarrow L_2 + L_3 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ \end{cases} \Leftrightarrow X \in \left\{{}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

il existe des solutions non nulles, donc $1\in\mathrm{Sp}(A)$ et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}}$ et $\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left({}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}$
qui est bien de dimension 1 car il s'agit d'un Vect composé d'un seul vecteur non nul.

3. A est-elle diagonalisable ? *1 point*

$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$ car sinon elle serait semblable et donc égale à la matrice identité, ce qui n'est pas le cas :
on suppose A diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où $D = I_3$ car $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ et P inversible,
donc $A = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, ce qui est faux.

4. Soit $e'_2 = (f-id)(e_3)$ et $e'_1 = (f-id)\left(e'_2\right)$

a. Calculer e'_2 et e'_1 *1 point*

On utilise le lien application linéaire- matrice $f((x,y,z)) = (a,b,c) \Leftrightarrow A^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ avec $M_{\mathscr{B}}(f-id) = M_{\mathscr{B}}(f) - M_{\mathscr{B}}(id) = A - I_3$

or $(A-I_3)^{t}(0 \quad 0 \quad 1) = {}^{t}(1 \quad 0 \quad -1)$ et $(A-I_3)^{t}(1 \quad 0 \quad -1) = {}^{t}(2 \quad 1 \quad 0) - {}^{t}(1 \quad 0 \quad -1) = {}^{t}(1 \quad 1 \quad 1)$

donc $\boxed{e'_2 = (1,0,-1) \text{ et } e'_1 = (1,1,1)}$

b. Montrer que $\mathscr{B}' = \left(e'_1, e'_2, e_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ *1,5 points*

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e_3 = (0,0,0)$

alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$

donc $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, de plus $\operatorname{Card} \mathscr{B}' = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

c. Déterminer la matrice T de f relative à la base $\mathscr{B}'$ *1 point*

On écrit donc $f(e'_1), f(e'_2), f(e_3)$ dans la base $\mathscr{B}'$
or d'après **2.** $f(e'_1) = e'_1$ et d'après **4.a.** $f(e'_2) = e'_1 + e'_2$ et $f(e_3) = e'_2 + e_3$

donc $\boxed{T = M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

d. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathscr{B}'$ et une relation entre P, T et A *1,5 points*

Par définition la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ correspond à la « lecture » des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

et par propriété de changement de base pour une application linéaire : $M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}$

donc par définition des matrices, et car par propriété $P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = P^{-1}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$, on trouve $\boxed{A = PTP^{-1}}$

5. On note $B = A - I_3$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$ *2 points*

On procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A^n = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = I_3 + 0 \times B + 0 \times B^2 \Leftrightarrow I_3 = I_3$
ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie

alors par hypothèse de récurrence $A^n = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$

$$\begin{aligned} \text{donc } A^{n+1} &= A^n A = A^n(B + I_3) = (I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2)(B + I_3) \\ &= B + nB^2 + \frac{n(n-1)}{2} B^3 + I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= I_3 + (n+1)B + \left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right) B^2 \text{ car } B^3 = (A - I_3)^3 = 0_3 \text{ d'après } \mathbf{1.} \end{aligned}$$

donc $A^{n+1} = I_3 + (n+1)B + \dfrac{(n+1)n}{2} B^2$ car $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{2n + n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1+2)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

donc $P(n+1)$ est vraie d'où l'hérédité et donc par théorème de récurrence,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est vraie i.e. } A^n = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2}$

b. En déduire trois suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : *1 point*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A + \gamma_n A^2$$

Comme $B = A - I_3$,, on déduit de la question précédente que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = I_3 + n\,(A - I_3) + \frac{n(n-1)}{2}\,(A - I_3)^2 = I_3 + nA - nI_3 + \frac{n(n-1)}{2}(A^2 - 2A + I_3)$$

$$= \left(1 - n + \frac{n(n-1)}{2}\right) I_3 + (n - n(n-1))A + \frac{n(n-1)}{2}A^2$$

or $1 - n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{-2(n-1) + n(n-1)}{2} = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$

donc $A^n = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2} I_3 + n(2-n)A + \dfrac{n(n-1)}{2} A^2$

d'où le résultat avec $\boxed{\alpha_n = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}, \quad \beta_n = n(2-n), \quad \gamma_n = \dfrac{n(n-1)}{2}}$

Nota bene : on peut vérifier que cette relation est valable pour $n = 0, n = 1$ et $n = 2$

Partie II : résolution d'une équation

Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation

$$\mathscr{E} : \quad M^2 = A \quad \text{d'inconnue} \quad M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

On suppose dans un premier temps que cette équation admet des solutions et que $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une solution de l'équation $\mathscr{E}$

On note g l'endomorphisme représenté par M suivant la base $\mathscr{B}$

Ainsi, on remarquera que $g^2 = g \circ g = f$

6. En utilisant un polynôme annulateur de M, montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}$ *1 point*

Puisqu'pn suppose que $M^2 = A$ alors $(M^2 - I_3)^3 = 0_3$ donc $\left(x^2 - 1\right)^3$ est un polynôme annulateur de M, or $\left(x^2 - 1\right)^3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$,

donc les racines du polynôme annulateur sont -1 et 1, donc $\boxed{\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}}$

7. **a.** Montrer que, si V est un vecteur propre de M, alors V est un vecteur propre de A *1 point*

Si V est vecteur propre de M alors $MV = \mu V$, avec $V \neq 0_{3,1}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

donc $M^2 V = M(MV) = M(\mu V) = \mu MV = \mu^2 V$ i.e. $AV = \mu^2 V$

donc $\boxed{V \text{ est aussi un vecteur propre de } A}$ associé à la valeur propre μ^2

b. En raisonnant sur la dimension du sous-espace propre de A, en déduire que :

i. M ne peut pas avoir deux valeurs propres différentes *1,5 points*

Si M admet deux valeurs propres distinctes, on peut trouver deux vecteurs propres linéairement indépendants V_1 et V_2 de M (deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre)

ces vecteurs étant aussi des vecteurs propres de A, on aurait : V_1 et V_2 dans $E_1(A)$ (l'unique sous-espace propre de A) et (V_1, V_2) libre, donc $\dim E_1(A) \geqslant 2$ ce qui n'est pas possible.

donc notre hypothèse de départ est fausse, donc $\boxed{M \text{ admet au plus une seule valeur propre.}}$

ii. si M admet une valeur propre, alors M admet une unique valeur propre, et que le sous-espace propre associé est de dimension 1 *1 point*

Il s'agit du même raisonnement, comme nous venons de le voir, si M admet une valeur propre, il n'en admet pas d'autre, donc il admet un seul sous-espace propre.

Si ce sous-espace était de dimension $\geqslant 2$, alors on pourrait trouver une famille libre $(\, V_1, V_2 \,)$ formée de vecteurs propres de M, donc de A

on aurait à nouveau $E_1(A)$ de dimension $\geqslant 2$ ce qui n'est pas possible

donc $\boxed{\text{si } M \text{ admet une valeur propre, il admet un seul sous-espace propre, de dimension } 1}$

8. Montrer que $f\left(g\left(e_1'\right)\right)=g^3\left(e_1'\right)=g\left(e_1'\right)$. En déduire qu'il existe un réel μ tel que : *2 points*

$$g\left(e_1'\right)=\mu e_1' \quad \text{et} \quad \mu^2=1$$

Puisque $f=g^2, f\left(g\left(e_1'\right)\right)=g^2\left(g\left(e_1'\right)\right)=g^3\left(e_1'\right)=g\left(g^2\left(e_1'\right)\right)=g\left(f\left(e_1'\right)\right)$
et comme $f\left(e_1'\right)=e_1'$ on obtient $f(g(e_1'))=g(e_1')$ i.e. le résultat cherché.
donc par analogie avec l'écriture matricielle, en notant $U={}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ on a $AMU=MU$
donc $MU\in E_1(A)=\operatorname{Vect}(U)$
donc $\exists\mu\in\mathbb{R}, MU=\mu U$, i.e. μ est valeur propre de M et U est un vecteur propre associé donc d'après **6.**
$\mu\in\{-1,1\}$ et donc $\mu^2=1$, donc avec l'application linéaire, $\boxed{\exists\mu\in\mathbb{R}, g(e_1')=\mu e_1' \text{ avec } \mu^2=1}$

Quitte à changer g en $-g$ (qui est une autre solution de $g^2=f$), on supposera dans la suite que :

$$g\left(e_1'\right)=e_1'$$

Des questions précédentes, on obtient que M admet une et une seule valeur propre égale à 1 , et son sous-espace propre associé est de dimension 1

9. Justifier que $M+I_3$ est inversible, puis que $(M-I_3)^3=0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ *2 points*

Puisque $\operatorname{Sp}(M)=\{1\}$ alors -1 n'est pas une valeur propre de M et de fait $\boxed{M+I_3 \text{ est inversible}}$

de plus, comme $\left(M^2-I_3\right)^3=0_3$, on a : $\left((M-I_3)\left(M+I_3\right)\right)^3=0_3$
donc $(M-I_3)^3\left(M+I_3\right)^3=0_3$ puisque $(M-I_3)(M+I_3)=(M+I_3)(M-I_3)$

$(M+I_3)$ étant inversible, elle est simplifiable donc $\boxed{(M-I_3)^3=0}$

10. On note $N=M-I_3$ et on rappelle que $B=A-I_3$

a. Montrer que : $N^2+2N=B$ *1 point*

$M^2=A$ donne $(N+I_3)^2=B+I_3$ soit $N^2+2N+I_3=B+I_3$ et donc $\boxed{N^2+2N=B}$

b. Montrer que $4N^2=B^2$ et en déduire une expression de N en fonction de B et de B^2, puis trouver trois réels a,b,c tels que : $\quad M=aI_3+bA+cA^2$ *2,5 points*

Comparer le résultat avec celui obtenu dans la question **5.b**.

En élevant au carré l'égalité $\left(N^2+2N\right)^2=B^2$, comme $\left(N^2+2N\right)^2=4N^2+4N^3+N^4=4N^2$

car $N^3=0_3$ (et donc $N^4=0_3$), on trouve $\boxed{4N^2=B^2}$

or d'après **10.a.** $N^2+2N=B$ donc $2N=B-N^2=B-\dfrac{1}{4}B^2$ et donc $N=\dfrac{1}{2}B-\dfrac{1}{8}B^2$

or $N=M-I_3$ et $B=A-I_3$ donc $M-I_3=\dfrac{1}{2}(A-I_3)-\dfrac{1}{8}(A-I_3)^2=-\dfrac{1}{2}I_3+\dfrac{1}{2}A-\dfrac{1}{8}(A^2-2A+I_3)$

donc $M=I_3-\dfrac{1}{2}I_3+\dfrac{1}{2}A-\dfrac{1}{8}I_3+\dfrac{1}{4}A-\dfrac{1}{8}A^2$ i.e. $\boxed{M=\dfrac{3}{8}I_3+\dfrac{3}{4}A-\dfrac{1}{8}A^2}$

d'où le résultat avec $a=\dfrac{3}{8}, b=\dfrac{3}{4}$ et $c=-\dfrac{1}{8}$

$\boxed{\text{Il s'agit des coefficients trouvés dans la question \textbf{5.b.} en remplaçant } n \text{ par } 1/2}$ (la formule semble donc valable plus largement que pour des puissances entières et positives).

c. Vérifier par un calcul que $\left(aI_3+bA+cA^2\right)^2=A$ *2 points*

On développe $\left(aI_3+bA+cA^2\right)^2=a^2I_3+abA+acA^2+baA+b^2A^2+bcA^3+caA^2+cbA^3+c^2A^4$
donc $\left(aI_3+bA+cA^2\right)^2=a^2I_3+2abA+(2ac+b^2)A^2+2bcA^3+c^2A^4$

or d'après la question **5.b.** (ou **2.** pour A^3), $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$ et $A^4 = 3I_3 - 8A + 6A^2$

donc $\left(aI_3 + bA + cA^2\right)^2 = a^2I_3 + 2abA + (2ac + b^2)A^2 + 2bc(3A^2 - 3A + I_3) + c^2(3I_3 - 8A + 6A^2)$

$= (a^2 + 2bc + 3c^2)I_3 + (2ab - 6bc - 8c^2)A + (2ac + b^2 + 6bc + 6c^2)A^2$

or d'après les valeurs de a, b et c, $a^2 + 2bc + 3c^2 = \dfrac{9}{64} - \dfrac{6}{32} + \dfrac{3}{64} = 0$

$2ab - 6bc - 8c^2 = \dfrac{18}{32} + \dfrac{18}{32} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{32}{32} = 1$ et $2ac + b^2 + 6bc + 6c^2 = -\dfrac{6}{64} + \dfrac{9}{16} - \dfrac{18}{32} + \dfrac{6}{64} = \dfrac{18 - 18}{32} = 0$

on trouve donc bien $\boxed{\left(aI_3 + bA + cA^2\right)^2 = A}$

Nota bene : il s'agit ici de la synthèse du raisonnement, à la question précédente, nous avions trouvé que c'était la seule solution possible, mais comme il ne s'agit pas d'un raisonnement par équivalence, il faut la vérifier.

Remarque : on pouvait aussi utiliser $A = B + I_3$ et poursuivre le calcul (en utilisant $B^3 = B^4 = 0$)

11. Conclure sur les solutions de $\mathcal{E}$ *1,5 points*

Avec les hypothèses précédentes, on a trouvé que l'unique solution était celle de la question **10.b.**, mais on avait considéré que la valeur propre était positive (en changeant g en $-g$, suivant la remarque de la question **8.**). On remarque aisément que l'opposée de cette solution est également solution d'après le calcul de la question **11.** (le $-$ disparait)

finalement $\boxed{\mathcal{E} \text{ admet donc deux solutions qui sont donc } aI_3 + bA + cA^2 \text{ et } -\left(aI_3 + bA + cA^2\right)}$

Remarque : pour bien faire il faudrait montrer que ces deux solutions ne sont pas égales.

Exercice 3 - Edhec 2020 *23 points*

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaitre la loi de Y *1 point*

Dans le cas où $n = 1$, X ne prend que la valeur 1. On pioche donc une boule dans l'urne V, boule qui a une probabilité p d'être blanche. Ainsi, Y prend la valeur 1 avec la probabilité p, et 0 avec la probabilité $1 - p$

Autrement dit, $\boxed{\text{lorsque } n = 1,\ Y \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p}$

On revient au cas général.

2. Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance. *1 point*

Il y a une boule portant chaque numéro entre 1 et n. Chaque numéro a donc la même probabilité d'être tiré.

par conséquent, $\boxed{X \text{ suit une loi uniforme dans } [\![1, n]\!]}$

d'après le cours, on a alors $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2}}$ et $\boxed{V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}}$

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaitre la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$ *1,5 points*

Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors on tire k boules dans l'urne V. Dans ce cas, la variable aléatoire Y compte donc le nombre de succès (tirer une boule blanche) lors d'une succession de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec une probabilité de succès égale à p

par conséquent, la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = k)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$ (et on ne peut obtenir strictement plus de k succès)

ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}}$

4. On rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$
- `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p
- `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p
- `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a

a. Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y *1 point*

```
def simulXY(n,p):
  X=
  Y=
  return
```

Il suffit de simuler les lois déterminées lors des questions **2.** et **3.** donc `X=rd.randint(1,n+1)` et `Y=rd.binomial(X,p)` et de renvoyer le résultat souhaité : `return X,Y` (ou seulement Y qui est plutôt la variable à laquelle on s'intéresse ici)

b. Ecrire un programme Python qui calcule la moyenne de 1 000 simulations de la variable aléatoire Y
Comment peut-on interpréter le résultat ? *1,5 points*

Il faut choisir n et p, on prend ici $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{3}$
Considérant que notre fonction précédente renvoie seulement Y (sinon on prend seulement le deuxième résultat avec `simulXY(10,1/3)[1]`) :

```
np.mean([simulXY(10,1/3) for n in range(1000)]
```

Le résultat doit nous donner une estimation de l'espérance de Y

5. **a.** Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis montrer que : *2 points*

$$P(Y = 0) = \frac{q\,(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors Y peut prendre les valeurs de 0 à k. Or, X peut prendre les valeurs de 1 à n. Donc $Y(\Omega) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [\![0, k]\!]$, c'est-à-dire $\boxed{Y(\Omega) = [\![0, n]\!]}$

alors, d'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X = k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, on a : $P(Y = 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) P_{(X=k)}(Y = 0)$

donc d'après les résultats des questions **2.** et **3.** (car $0 \leqslant k$) $P(Y = 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{0} p^0 q^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q^k$

on reconnait alors une somme de termes d'une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$

d'où $\boxed{P(Y = 0) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{q - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}}$

b. Ecrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier. *2 points*

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ quelconque,
de même, par la formule des probabilités totales (système complet d'événements $(X = k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$) :

$P(Y = i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) P_{(X=k)}(Y = i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = i)$ d'après la question **2.**

donc $P(Y = i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = i)$ car $P_{(X=k)}(Y = i) = 0$ si $k < i$ (cf question **3.**) : ce qui donne, d'après la question **3.** (cas $i \leqslant k$: $\boxed{P(Y=i)=\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{n}\binom{k}{i}p^iq^{k-i}=\frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^iq^{k-i}}$

6. **a.** Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Montrer l'égalité : $i\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$

Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$, alors : *1 point*

$$i\binom{k}{i}=i\frac{k!}{(k-i)!i!}=\frac{k!}{(k-i)!(i-1)!}=k\frac{(k-1)!}{(k-i)!(i-1)!}=k\frac{(k-1)!}{\big((k-1)-(i-1)\big)!(i-1)!}$$

ce qui donne bien : $\boxed{i\binom{k}{i}=k\binom{k-1}{i-1}}$

b. Etablir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par : *2,5 points*

$$E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}p^iq^{k-i}\right)$$

La variable aléatoire Y ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, elle admet donc une espérance, alors, puisque $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$, $E(Y)=\sum_{i=0}^{n}iP(Y=i)=\sum_{i=1}^{n}iP(Y=i)$ (le terme pour $i=0$ est nul)

donc $E(Y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^iq^{k-i}\right)$ d'après la question **5.b.**

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^iq^{k-i}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}i\binom{k}{i}p^iq^{k-i}$$

$E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}i\binom{k}{i}p^iq^{k-i}$ (opération délicate sur les bornes car on permute les deux sommes)

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}k\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}$ d'après la question **6.a.**

Ce qui donne finalement : $\boxed{E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}\right)}$

<u>Remarque</u> : cette interversion de sommes n'est en fait pas au programme (puisque c'est un cas où l'indice de la deuxième somme dépend de celui de la première).

c. En déduire que $E(Y)=\frac{(n+1)p}{2}$ *2 points*

Soit $k \in [\![1;n]\!]$ quelconque. On commence par calculer la somme intérieure :

$\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^{j+1}q^{k-1-j}$ avec le changement d'indice $j=i-1$

$=p\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^jq^{k-1-j}=p(p+q)^{k-1}$ d'après le binôme de Newton

$=p\times 1^{k-1}=p$

ainsi, $E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(kp)=\frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{p}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}$ et finalement : $\boxed{E(Y)=\frac{(n+1)p}{2}}$

7. **a.** Etablir que : $\forall n \geqslant 2, E(Y(Y-1))=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\begin{pmatrix} k-2 \\ i-2 \end{pmatrix}p^iq^{k-i}\right)$ *3 points*

On procède comme à la question **6.b.**, d'après le théorème du transfert, pour tout $n \geqslant 2$,

$E(Y(Y-1)) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)P(Y=i) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)P(Y=i)$ car les termes pour $i=0$ et $i=1$ sont nuls

$$E(Y(Y-1)) = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{i(i-1)}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \quad \text{d'après la question } \mathbf{5.b.}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=i}^{n} i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{k} i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad \text{en permutant les sommes}$$

on va alors à nouveau utiliser la question **6.a.** et deux fois, comme $k \geqslant i \geqslant 2$ alors $k-1 \geqslant i-1 \geqslant 1$:

donc $(i-1)i\binom{k}{i} = (i-1)k\binom{k-1}{i-1} = k(i-1)\binom{k-1}{i-1} = k(k-1)\binom{k-2}{i-2}$

donc $E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{k} k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}$

ce qui donne finalement : $\boxed{E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)}$

b. Montrer que l'on a : $\forall n \geqslant 2, E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$ *2,5 points*

On procède comme à la question **6.c.**, on commence par simplifier la somme intérieure :

$$\sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^{j+2} q^{k-2-j} \quad \text{avec le changement d'indice } j = i-2$$

$$= p^2 \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^j q^{k-2-j} = p^2 (p+q)^{k-2} \quad \text{d'après le binôme de Newton}$$

$$= p^2 \times 1^{k-2} = p^2$$

ainsi, $E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k(k-1)p^2\right) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^{n} (k^2-k) = \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right)$

donc $E(Y(Y-1)) = \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6}$

$$= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)\big((2n+1)-3\big)}{6} = \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$$

$$= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{(n+1)(n-1)p^2}{3}$$

ce qui donne bien : $\boxed{E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}}$

c. Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$ *1 point*

Lorsque $n = 1$, la variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{0; 1\}$, donc dans tous les cas $Y(Y-1) = 0$ on en déduit que $E(Y(Y-1)) = 0$ et $\frac{(1^2-1)p^2}{3} = 0$ également.

$\boxed{\text{Conclusion : l'expression obtenue à la question précédente reste valable lorsque } n = 1}$

d. Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$ *1 point*

On a $E(Y(Y-1)) = E(Y^2 - Y) = E(Y^2) - E(Y)$ par linérité de l'espérance et on en déduit $E(Y^2)$ et d'après la formule de Kœnig-Huygens $V(X) = E(Y^2) + E(Y)^2$ $\boxed{= E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2}$

Remarque : avec les résultats des questions **6.c.** et **7.c.**, on trouverait $V(Y) = \frac{(np - 7p + 6)(n+1)p}{12}$