ECG 2 - mathématiques appliquées Février 2026

Chapitre 12 - fonctions numériques de deux variables réelles

Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais : • justifier le caractère $\mathscr{C}^1, \mathscr{C}^2$ d'une fonction à deux variables ☐ • calculer les dérivées partielles du premier ordre (gradient) d'une fonction de deux variables ☐ • calculer la matrice hessienne d'une fonction de deux variables ☐ • déterminer les éventuels points critiques ☐ • déterminer la nature d'un point critique (extremum local ou non) à l'aide de l'étude des valeurs propres de la matrice hessienne ☐

Dans tout le chapitre, f désignera une fonction de deux variables, on écrira donc $f(x, y)$, et une fonction « numérique » c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$
Elle sera généralement définie sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathcal{O}$, un « ensemble ouvert » de $\mathbb{R}^2$

1 Continuité, dérivation, classe $\mathscr{C}^1, \mathscr{C}^2$

1.1 Continuité

Voir la fin du chapitre pour la définition de la continuité.

Propriété - fonctions continues de référence : les fonctions de deux variables suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$ • les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$, appelées **fonctions coordonnées**. • les fonctions du type $(x, y) \mapsto \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \lambda_{i,j} x^i y^j$ appelée **fonctions polynomiales**	Exemples : $(x, y) \mapsto x^2 + 3y$ $(x, y) \mapsto 1 - \ln(2)x^3y^7 + 9y^2 - 6x$ sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto \dfrac{5x^3 - 11xy^2}{e^x + 1}$ n'est pas polynomiale
Propriétés - opérations et composition de fonctions continues : • la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $\mathcal{O}$ est continue sur $\mathcal{O}$ • si $f : \mathcal{O} \to I \subset \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $g \circ f$ l'est aussi. autrement dit, la composée (lorsque cela a un sens) de deux fonctions continues est continue.	Exemple : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit f par $f(x, y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^4 + 1) + e^{xy}}{\|x\| + \|y\| + 1}$ alors $(x, y) \mapsto x^2 + y^4 + 1, (x, y) \mapsto xy, (x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont polynomiales donc continues $t \to \ln(t), t \to e^t$ et $t \to \|t\|$ sont continues donc par composition : $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 1), (x, y) \mapsto e^{xy}$, $(x, y) \mapsto \|x\|$ et $(x, y) \mapsto \|y\|$ sont continues donc par opérations (addition et quotient), f est continue.

Représentation graphique : on représente une fonction de deux variables sous la forme de surfaces (3D) ou par lignes de niveaux (ou lignes isoplèthes pour le terme savant) : *isohypse* (même hauteur) en cartographie, *isobares* (même pression) en météorologie, *isobathes* (même profondeur) pour la bathymétrie (les fonds marins), etc ...

1.2 Dérivation, classe $\mathscr{C}^1$, classe $\mathscr{C}^2$, gradient, matrice hessienne

f est une fonction de deux variables définie sur un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$

<u>Définition</u> : pour $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ • si $x \longmapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, alors sa dérivée est notéee $\partial_1 f(x_0, y_0)$, appellée **dérivée partielle d'ordre** 1 **en** (x_0, y_0) **par rapport à la première variable** • si $y \longmapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, alors sa dérivée est notée $\partial_2 f(x_0, y_0)$, appellée **dérivée partielle d'ordre** 1 **en** (x_0, y_0) **par rapport à la seconde variable**.	<u>Exemple</u> : avec $f(x,y) = 3x^2 - 5xy$ alors $x \mapsto f(x, 1)$ est dérivable en 2 et $\partial_1 f(2,1) = 12 - 5 = 7$ et $y \mapsto f(2, y)$ est dérivable en 1 et $\partial_2 f(2,1) = -10$

<u>Dans la pratique, on retiendra</u> :
on calcule $\partial_1 f(x,y)$ en fixant y et en dérivant par rapport à x
on calcule $\partial_2 f(x,y)$ en fixant x et en dérivant par rapport à y

<u>Définition</u> : on définit des **fonctions dérivées partielles d'ordre** 1, les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sur $\mathcal{O}$ sous réserve d'existence de dérivées en tout point de $\mathcal{O}$ dans ce cas, $\partial_1 f$ (resp. $\partial_2 f$) est appelée **dérivée partielle de** f **par rapport à la première** (resp. **seconde**) **variable**. Ces deux dérivées partielles sont appelées dérivées premières de f	<u>Exemple</u> : avec $f(x,y) = e^{x^2-y+1}$ alors f est dérivable et pour (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $\partial_1 f(x,y) = 2xe^{x^2-y+1}$ (forme $u'(x)e^{u(x)}$) $\partial_2 f(x,y) = -e^{x^2-y+1}$ (forme $v'(y)e^{v(y)}$)
<u>Définition</u> : **dérivées partielles d'ordre** 2 si f admet des dérivées premières sur $\mathcal{O}$, et si ces dérivées admettent des dérivées premières, on dira que f admet des **dérivées secondes** et dans ce cas : • la dérivée de $\partial_1 f$ par rapport à la première variable est notée : $\partial_1(\partial_1 f) = \partial^2_{1,1} f$ • la dérivée de $\partial_1 f$ par rapport à la seconde variable est notée : $\partial_2(\partial_1 f) = \partial^2_{2,1} f$ • la dérivée de $\partial_2 f$ par rapport à la première variable est notée : $\partial_1(\partial_2 f) = \partial^2_{1,2} f$ • la dérivée de $\partial_2 f$ par rapport à la seconde variable est notée : $\partial_2(\partial_2 f) = \partial^2_{2,2} f$ ces dérivées sont appelées **dérivées secondes** de f	<u>Exemple</u> : avec l'exemple précédent alors f admet des dérivées secondes et pour tout (x,y) et $\mathbb{R}^2$, $\partial^2_{1,1} f(x,y) = 2e^{x^2-y+1} + 2x\left(2xe^{x^2-y+1}\right)$ $= (2+4x^2)e^{x^2-y+1}$ $\partial^2_{2,1} f(x,y) = -2xe^{x^2-y+1}$ $\partial^2_{1,2} f(x,y) = -2xe^{x^2-y+1}$ $\partial^2_{2,2} f(x,y) = -\left(-e^{x^2-y+1}\right) = e^{x^2-y+1}$
<u>Définition et propriété</u> : f est dite de **classe** $\mathscr{C}^1$ (respectivement de **classe** $\mathscr{C}^2$) sur $\mathcal{O}$ lorsque qu'elle admet des dérivées premières (respectivement des dérivées secondes) continues en tout point de $\mathcal{O}$ Toute fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert est aussi de classe $\mathscr{C}^1$	<u>Exemple</u> : $(x,y) \mapsto e^{x^2-y+1}$ est $\mathscr{C}^1$ car ses dérivées premières sont continues par composition d'une fonction polynomiale, donc continue par l'exponentielle qui est continue.

Propriété - fonctions $\mathscr{C}^2$ de référence : les fonctions **fonctions polynomiales** sont $\mathscr{C}^2$ (et donc $\mathscr{C}^1$) sur $\mathbb{R}^2$	Exemple : $(x,y) \mapsto \frac{\ln(7)}{e}x^2 - \pi xy + y^{31}$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$
Propriétés - opérations et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$: • la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ ($k=1$ ou $k=2$) sur $\mathcal{O}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathcal{O}$ • si $f : \mathcal{O} \to I \subset \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$, alors $g \circ f$ l'est aussi.	Exemple : $(x,y) \mapsto \sqrt{x^4+y^2+5}e^{-xy^3}$ est $\mathscr{C}^2$ car $(x,y) \mapsto x^4+y^2+5$ et $(x,y) \mapsto -xy^3$ sont polynomiales donc $\mathscr{C}^2$ $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et $t \mapsto e^t$ est $\mathscr{C}^2$ d'où le résultat par composition et produit de fonctions $\mathscr{C}^2$

Théorème de Schwarz : si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$, alors $\partial^2_{12}f = \partial^2_{21}f$	Exemple : voir l'exemple avec le calcul des dérivées secondes , $f(x,y) = \exp(x^2-y+1)$

Définition : lorsque f admet des dérivées premières, pour tout $(x,y) \in \mathcal{O}$, le vecteur $\boxed{\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}}$ est appelé **gradient** de f au point (x,y)	Exemple : avec $f(x,y) = \exp(x^2-y+1)$ d'après les calculs précédents, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2-y+1} \\ -e^{x^2-y+1} \end{pmatrix}$
Définition : lorsque f admet des dérivées secondes, pour tout $(x,y) \in \mathcal{O}$, la matrice $\boxed{\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}}$ est appelée **matrice hessienne** de f au point (x,y)	Exemple : avec le même exemple $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} (2+4x^2)e^{x^2-y+1} & -2xe^{x^2-y+1} \\ -2xe^{x^2-y+1} & e^{x^2-y+1} \end{pmatrix}$
Propriété : la matrice hessienne d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ est symétrique en tout point.	Remarque : cela découle immédiatement du théorème de Schwarz.

2 Extrema

Dans cette section, f est toujours une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert $\mathcal{O}$

2.1 Point critique

Définition : si f est de classe $\mathscr{C}^1$ un **point critique** de f est un point $(x_0,y_0) \in \mathcal{O}$ pour lequel le gradient de f s'annule, soit $\boxed{\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 f(x_0,y_0) = 0 \\ \partial_2 f(x_0,y_0) = 0 \end{cases}}$	Exemple : avec $f(x,y) = 3x^2 - 5xy$ alors (x,y) est point critique $\Leftrightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6x-5y \\ -5x=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

2.2 Maximum, minimum local et global

Définitions : on dit que f admet un **minimum global**, respectivement un **maximum global**), en (x_0, y_0) si, pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}, f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$ respectivement, $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ le minimum ou le maximum est la valeur de $f(x_0, y_0)$	Exemple : avec $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ (sur $\mathbb{R}^2$) alors $f(0, 0) = 1$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \geqslant 0$ et $y^2 \geqslant 0 \Rightarrow f(x, y) \geqslant 1$ i.e. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geqslant f(0, 0)$ donc 1 est un minimum (atteint en $(0, 0)$)
Définitions : on dit que f admet un **minimum local**, respectivement un **maximum local**, en (x_0, y_0) s'il existe un ouvert $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ telle que f, restreinte à $\mathcal{O}'$, admette un minimum global, respectivement un maximum global, en (x_0, y_0)	Remarques : • ce sont les définitions analogues à celles des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ • on peut avoir plusieurs extrema locaux pour une fonction (plusieurs minima locaux ou plusieurs maxima locaux). On n'a qu'un seul maximum ou minimum global, mais cette valeur peut être atteinte en plusieurs endroits.

2.3 Condition nécessaire pour avoir un extremum

Propriété : si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, alors (x_0, y_0) est un point critique : $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0, y_0) \\ \partial_2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Exemple : avec $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ on retrouve que le gradient s'annule en $(0, 0)$ qui est un minimul global (et donc a fortiori local) car $\partial_1 f(x, y) = 2x$ et $\partial_2 f(x, y) = 2y$

Conséquence pratique : dans la recherche d'extremum (cf. plus bas), on cherchera d'abord les points critiques pour connaitre les points « candidats », mais cela ne suffira pas...

⚠ il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante. Comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec la condition f' s'annule pour un extremum local (cf. la fonction cube).
Par exemple avec $f(x, y) = x^2 - y^2$, on trouve facilement que $(0, 0)$ est un point critique et $f(0, 0) = 0$, mais $\forall x \neq 0, f(x, 0) = x^2 > 0$ et $\forall y \neq 0, f(0, y) = -y^2 < 0$ donc on peut s'approcher indéfiniment du point $(0, 0)$ et on trouvera toujours des valeurs strictement supérieures et des valeurs strictement inférieures à $f(0, 0)$, ce point ne peut donc pas être un extremum local.

2.4 Condition suffisante d'existence d'un extremum et point selle

Dans cette section, f est de classe $\mathscr{C}^2$. On sait déjà qu'en tout point $(x, y), \nabla^2 f(x, y)$ la matrice hessienne de f en (x, y) est symétrique, donc .

Propriété - condition suffisante d'existence d'un maximum

on suppose que (x_0, y_0) est un point critique de f et on pose $H = \nabla^2 f(x_0, y_0)$:

- si les valeurs propres de H sont toutes
  - ▷ strictement positives alors f admet un minimum local en (x_0, y_0)
  - ▷ strictement négatives alors f admet un maximum local en (x_0, y_0)
- si H admet 2 valeurs propres non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0) mais admet un point selle (ou point col) en (x_0, y_0)

Remarque : si une des deux valeurs propres est nulle, on ne peut rien conclure : il faut étudier le signe de $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ au cas par cas.

Exemple : soit f définie par $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ alors

alors $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}3(y-x^2)\\3(x-y^2)\end{pmatrix}$ donc $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2\\ x=y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=y^4\\ x=y^2\end{cases}$

donc f admet pour points critiques $(0,0)$ et $(1,1)$

alors $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}-6x & 3\\ 3 & -6x\end{pmatrix}$ donc $H(0,0)=\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}$ et $H(1,1)=\begin{pmatrix}-6&3\\3&-6\end{pmatrix}$

• au point $(0,0)$, $\det(H(0,0)-\lambda I_2)=\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)$
les valeurs propres sont -3 et 3, donc de signes strictement opposés et donc f admet un point selle

• au point $(1,1)$, $\det(H(1,1)-\lambda I_2)=(-6-\lambda)^2-3^2=(\lambda+6-3)(\lambda+6+3)=(\lambda+3)(\lambda+9)$
les valeurs propres sont -3 et -9, donc strictement négatives et donc f admet maximum local

La recherche d'extremum est le sujet d'étude n°1 dans ce chapitre et on rencontrera fréquemment la démarche suivante.

Méthode classique :

1) on montre que f est $\mathscr{C}^2$ avec les théorèmes généraux,
2) on détermine le(s) point(s) critique(s) de f (alors candidat(s) au statut d'extremum),
3) on détermine les valeurs propres de la matrice hessienne de chaque point critique et on conclut sur son statut : minimum local, minimum global ou point selle (point col),
4) on poursuit éventuellement l'étude pour déterminer si on peut passer au statut d'extremum global (différentes méthodes pour établir des inégalités sur la fonction).

Analogie avec les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la recherche d'extremum local

	Fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	Fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local	f' s'annule	le gradient de f s'annule (point critique)
Condition suffisante d'existence d'un maximum local	en a : $f'(a)=0$ et $f''(a)<0$	en (a,b) : $\nabla f(a,b)=(0,0)$ et les valeurs propres de $\nabla^2 f(a,b)$ sont strictement négatives
Condition suffisante d'existence d'un minimum local	en a : $f'(a)=0$ et $f''(a)>0$	en (a,b) : $\nabla f(a,b)=(0,0)$ et les valeurs propres de $\nabla^2 f(a,b)$ sont strictement positives

3 Fonction continue sur une partie fermée bornée

Définitions : une partie F de $\mathbb{R}^2$ est dite **fermée** si son complémentaire $\mathbb{R}^2\backslash F$ est ouvert.
Dans la pratique : $[0,1]\times[0,1], \mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$
Une partie F de $\mathbb{R}^2$ est dite **bornée** si $\exists M\in\mathbb{R}_+, \forall (x,y)\in F, \max(|x|,|y|)\leqslant M$

Propriété (comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :
une fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes.

⚠ les résultats de la **section 2** sont valables sur des ouverts.

Un peu de théorie

Distance et parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$

Définitions : on appelle **distance** (euclidienne) entre deux points (x, y) et (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ le nombre,

$$\boxed{d\Big((x,y),(x_0,y_0)\Big) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

pour $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle **disque de centre** (x_0, y_0) **et de rayon** r l'ensemble

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, d\Big((x,y),(x_0,y_0)\Big) \leqslant r\Big\}$$

Définition : un **ouvert** non vide $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle on peut, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ inclure un disque de centre (x_0, y_0) et d'un certain rayon $r > 0$

Remarques : en résumé pour qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ soit un ouvert, il faut qu'il y ait « au moins un peu de place » autour de chaque point.
La continuité, la classe $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, les points critiques, etc... sont exclusivement étudiés sur des ouverts non vides de $\mathbb{R}^2$. Dans ce chapitre, $\mathcal{O}$ désigne toujours ce type d'ouvert.

Continuité

Comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la continuité en un point signifie qu'on se rapproche de la valeur du point quand on se rapproche du point :

Définition :
une fonction $f : \mathcal{O}^2 \to \mathbb{R}$ est dite **continue** en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} f(x_0,y_0)$

Pour préciser la notion $(x, y) \to (x_0, y_0)$, cette définition s'écrit avec des quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in \mathcal{O} : \quad d\Big((x,y),(x_0,y_0)\Big) < \alpha \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

Une fonction de deux variables est **continue sur** $\mathcal{O}$ si elle l'est en tout point de $\mathcal{O}$

Développement limité

Pour une fonction de f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$, et $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, on peut définir un développement limité de f à l'ordre 1 qui s'écrit :

Propriété :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + {}^t[\nabla f(x_0,y_0)].\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \varepsilon(0,0) = 0$$