TD 12 - fonctions numériques de deux variables réelles

Exercice 1

Justifier la classe $\mathscr{C}^1$ et calculer les dérivées partielles premières de chacune des fonctions suivantes sur l'ouvert $\mathcal{O}$ donné : (on a remplacé $f : (x, y) \mapsto \ldots$ par $f(x, y)$)

1. $f(x, y) = xy + x^3y^2 + 2x(1 - y)^2 \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

2. $f(x, y) = (2x + y)^2 + (x - 2y)^2 \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

3. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1} \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

4. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

5. $f(x, y) = xy + \ln(x)\ln(y) \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

6. $f(x, y) = \ln(x + y) + \ln(x - y) - \ln(x) \qquad \mathcal{O} = ?$

7. $f(x, y) = \exp(xy) + x + y \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

8. $f(x, y) = xy\exp(x - y) \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

9. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

10. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{1 + x + y}} \qquad \mathcal{O} = ?$

11. $f(x, y) = (\ln(x + y))^2 + (\ln(x - y))^2 \qquad \mathcal{O} = ?$

12. $f(x, y) = \exp(y + 2x) - \exp(y - 2x) \qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

Exercice 2 - classique

Soit f la fonction définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f

2. Montrer que f admet un et un seul point critique noté (a, b)

3. Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2 f(a, b)$ de f au point critique (a, b).

4. Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2 f(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.

5. Le but de cette question est de montrer que m est un extremum *global*.

a. Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \ldots$$

b. Compléter de même l'égalité : $\dfrac{y^2}{2} - 2y + 6 = \dfrac{1}{2}(y - 2)^2 + \ldots$

c. Conclure.

Exercice 3 - classique encore

On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
2. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f

   b. Montrer que le gradient de f est nul en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si, et seulement si : $\begin{cases} x^3 - x + y & = 0 \\ y^3 + x - y & = 0 \end{cases}$

   c. En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
3. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f

   b. Ecrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

   c. Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices.

   d. Montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques et donner la valeur de ce minimum.

   e. Déterminer les signes de $f(x, -x)$ et de $f(x, x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
   Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f
4. **a.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$

   b. Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. justifier que la fonction proposée est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$
2. déterminer le gradient en tout point,
3. déterminer les points critiques,
4. déterminer la matrice hessienne aux points critiques,
5. déterminer la nature des points critiques (minimum ou maximum local, point selle, autre...).

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$
2. $f(x, y) = x(x + 1)^2 - y^2$ sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$
3. $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$
4. $f(x, y) = x^2y^2(1 + 3x + 3y)$ sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$
5. $f(x, y) = x(\ln(x)^2 + y^2)$ sur $\mathcal{O} = ?$
6. $f(x, y) = ye^x - e^y$ sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$
7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{y^2 + (x - 1)^2}$ sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

Exercice 5

On considère $g : (x, y) \mapsto x(\ln(x) + x + y^2)$ définie sur l'ouvert $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \ln(x) + 2x + 1$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer les variations de f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\alpha > 0$
3. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$
4. Déterminer les points critiques de g
5. Montrer que g admet un minimum local, et vérifier que sa valeur est $m = -\alpha(\alpha + 1)$

Exercice 6

On considère $f: (x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + \exp(-x)$ définie sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$

1. Montrer que l'équation $e^{-x} = x$ admet une et une seule solution $\alpha > 0$
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$
3. Montrer que $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ est le seul point critique de f
4. Montrer que f admet un extremum local en $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ et en préciser la nature (minimum ou maximum).

Exercice 7 - un calcul de dérivées secondes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$
On pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g(x,y) = f(x+2y) + f(x-2y)$
Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$4\partial^2_{1,1}g(x,y) - \partial^2_{2,2}g(x,y) = 0$$

Exercice 8 - EML

On pose, pour $(x,y) \in \mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $F(x,y) = x^2y + x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 - 2x$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = x^3 + x - 1$

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]0,1[$
2. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$
3. Montrer que F admet (α, α^2) pour unique point critique.
4. Ecrire la matrice hessienne H de F en son point critique.
5. Justifier que H admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 vérifiant :

$$\lambda_1\lambda_2 = -6\alpha^2 - 2$$

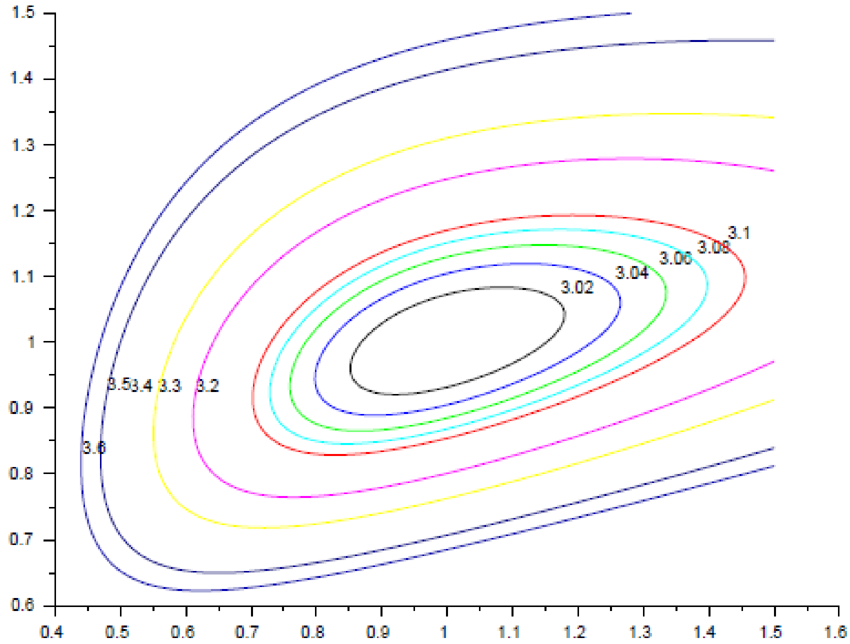
6. Quelle est la nature du point critique (α, α^2) de F ?

Exercice 9 - Ecricome

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{O}, \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

1. On utilise Python pour tracer les lignes de niveau de la fonction f et on obtient le graphe suivant :



Que pouvez-vous conjecturer concerant l'existence d'un extremum local de la fonction f ?

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$, puis calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

3. Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.

4. Montrer que la matrice hessienne de f au point A est $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

En déduire que f admet bien un extremum en A dont on précisera la nature (maximum ou minimum) et la valeur.